

Dorin Lint
Maranda Lint
Sorin Noaghi
Alina Carmen Birta
Maria Zaharia

$$a^0 = 1$$

Matematică

Manual pentru clasa a V-a

5

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației.
Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 3393/28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

Dorin Liņ

Maranda Liņ

Sorin Noaghi

Alina Carmen Birta

Maria Zaharia

Matematică

5

Manual pentru clasa a V-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației prin ordinul de ministru nr. 4065/16.06.2022

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2022–2023.

Inspectoratul școlar

Școala/Colegiul/Liceul

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				La primire	La predare
1					
2					
3					
4					

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Matematică. Manual pentru clasa a V-a

Dorin Linț, Maranda Linț, Sorin Doru Noaghi, Alina Carmen Birta, Maria Zaharia

Referenți științifici: Lector. univ. dr. Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică,
Facultatea de Științe, Universitatea din Petroșani
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara

Copyright © 2022 Grup Media Litera

Toate drepturile rezervate



Editura Litera

tel.: 0374 82 66 35; 021 319 63 90; 031 425 16 19

e-mail: contact@litera.ro

www.litera.ro

Editor: Vidrașcu și fii

Redactor: Carmen Alina Birta

Corector: Carmen Bitlan

Credite foto: Dreamstime, Shutterstock

Copertă: Vlad Panfilov

Tehnoredactare și prepress: Banu Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : manual pentru clasa a V-a / Dorin Linț,
Maranda Linț, Sorin Noaghi, ... – București :
Litera, 2022
ISBN 978-606-33-9057-9
I. Linț, Dorin
II. Linț, Maranda
III. Noaghi, Sorin
51

Dragul nostru elev,

Manualul de Matematică pentru clasa a V-a se bazează pe noțiunile învățate în clasele I-IV la disciplina *matematică*; acestea sunt aprofundate și îmbogățite cu noi cunoștințe, conform programei școlare în vigoare. *Din nou la școală* vă oferă o scurtă călătorie prin cunoștințele dobândite în clasa a IV-a.

Urmează apoi să continuați să descoperiți fascinanta lume a matematicii prin cele patru capitole:

- I. Numere naturale
- II. Frații ordinare
- III. Frații zecimale
- IV. Elemente de geometrie și unități de măsură.

Fiecare capitol este divizat în **unități de învățare**, în total 14 unități, compuse din **lecții**, în total 65 de lecții.

Fiecare lecție poate fi parcursă în 1-2 ore de curs. S-a asigurat, în acest fel, alocarea unui număr substanțial de ore (aproximativ 25%), la dispoziția profesorului, pentru activități remediale și de progres.

Manualul, atât în varianta tipărită cât și în cea digitală, vă oferă instrumente pe care le puteți folosi pentru activități specifice, individuale sau colective. Profesorul vostru vă poate îndruma pentru a putea să vă folosiți de aceste instrumente și să aveți rezultate bune.

Pe pagina de deschidere a fiecărui capitol se poate vedea, sub forma unui AMII static, structura acestuia. Din perspectiva predare-învățare, capitolele se încheie cu câte o schemă recapitulativă sub forma unei diagrame.

Rubricile folosite pentru structurarea lecțiilor respectă etapele specifice operațiilor mentale formate și dezvoltate prin activități matematice și permit flexibilizarea activității în scopul respectării diferențelor individuale și de grup, între elevi de aceeași vârstă.

Conținuturile sunt prezentate din perspectiva creării de noi instrumente informaționale, necesare dezvoltării de competențe specifice, valorificând experiența concretă pe care ați acumulat-o.

Noțiunile sunt prezentate intuitiv, într-un limbaj verbalizat, explicit, accesibil, evitându-se folosirea de notații sau de abstractizări în exces.

Modul de prezentare asigură conexiuni între noțiunile, ideile, relațiile apărute, prin ilustrarea în paralel a textului științific cu exemple și reprezentări vizuale: grafice, diagrame, imagini.

Activitățile de învățare-evaluare sunt diverse: individuale, frontale sau în echipe, realizate prin itemi de tipuri variate, prin invitațiile lansate pentru participare la proiectele propuse. Toate acestea au fost concepute pentru ca voi, elevii noștri, să parcurgeți pași importanți către o gândire critică și creativă, bazată pe obișnuința de a identifica și de a folosi modele matematice pentru rezolvarea unor probleme cotidiene.

După parcurgerea fiecărei unități din manual, apreciază activitatea ta, completând pe caiet *Fișa de observare a comportamentului*, după modelul de mai jos. Adună fișele de la fiecare unitate și analizează ce s-a modificat față de fișele anterioare.

Comportamentul	Niciodată	Uneori	Deseori	Întotdeauna
Am dovedit interes în învățare.				
Am urmat instrucțiunile profesorului.				
Am lucrat individual.				
Am cerut ajutor când am avut nevoie.				
Când am greșit, am vrut să aflu cum pot să corectez.				
Am dus activitățile până la capăt.				
Mi-am spus părerea.				
Am cooperat cu ceilalți în activitățile de grup.				

STRUCTURA MANUALULUI



VARIANTA TIPĂRIȚĂ

Manualul de Matematică pentru clasa a V-a cuprinde patru capitole, totalizând un număr de 14 unități de învățare care respectă domeniile și conținuturile din programă. Unitățile de învățare sunt divizate în 2–8 lecții. Lecțiile sunt însoțite de activități de învățare-evaluare interactive, cu caracter practic-aplicativ, care determină formarea competențelor specifice cu care acestea sunt corelate.

Testele inițiale vă oferă posibilitatea de a vă evalua nivelul cunoștințelor la începutul anului școlar.

Minitestele - aflate la finalul fiecărei lecții - prin punctajul acordat, au scopul de a identifica la timp unele aspecte care trebuie îmbunătățite și oferă o anumită imagine asupra gradului de înțelegere a lecției.

Test de evaluare/autoevaluare – la finalul fiecărei unități de învățare;

Test de evaluare sumativă – la finalul fiecărui capitol;

Teste finale – la finalul manualului.

PAGINĂ DE PREZENTARE A CAPITOLULUI

Numărul capitolului

Titlul capitolului

Unități de învățare

Competențe specifice

CAPITOLUL IV

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1. PUNCT, DREAPTĂ, PLAN, SEMIDREAPTĂ, SEMIPLAN, SEGMENT DE DREAPTĂ

2. UNGHURI

3. FIGURI CONGRUENTE. AXĂ DE SIMETRIE

4. UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Competențe specifice: 1.2, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3.

Proiectul propus

Numărul de pagină

PROIECT - PROVOCARE

Mai aproape de viitor, învățând geometria cu GeoGebra

A. Dacă veți răspunde „proceduri” noastre, atunci:

- veți cunoaște încălzite pe care în oferta GeoGebra pentru hidrogena matematică geometrie elementară plan;
- veți ști să reprezentați prin intermediul aplicației GeoGebra unele configurații geometrice simple, în acord cu lecțiile de geometrie practice;
- veți ști să modificați și să salvați un fișier GeoGebra;
- veți putea urmări anumite proprietăți geometrice, realizând modificări specifice configurațiilor (de exemplu, distanțarea unui punct în plan sau pe un obiect geometric);
- veți putea salva fișierele GeoGebra în alte formate (de exemplu, jpg);
- veți ști să utilizați în GeoGebra configurații necesare abordării unor probleme teoretice și practice și să le folosiți pentru rezolvarea acestora.

B. Prezentarea softului

GeoGebra este un soft educațional cu aplicații multiple în matematica elementară, care s-a folosit în anul 2007 de profesorul austriac Markus Hohenwarter ca tool de masterat la Universitatea din Salzburg. Softul este gratuit, tradus în multe limbi (inclusiv în limba română) și poate fi un ajutor prețios în multe domenii din matematică.

În geometrie, GeoGebra realizează cu acuratețe figurile geometrice și dăați avantajele:

- poate verifica, trasa, proprietățile figurilor geometrice plane;
- poate calcula măsura geometrică (suprafață, distanță, etc.);
- poate desena animații cu elemente geometrice fundamentale;
- poate afișa un text care însoțește o configurație geometrică.

Pe lângă acestea, GeoGebra oferă și un set de instrumente pentru desenul tehnic.

C. Prezentare

Veți găsi în manualul digital semnalate, prin simbolul „P” pe lângă informații de interes și de interes în care se va explica modalitatea de rezolvare a problemelor respective.

177

PAGINI DE LECȚII (CONȚINUT)

Titlul lecției

Ne amintim

Titlul unității

1 PUNCT, DREAPTĂ, PLAN, SEMIDREAPTĂ, SEMIPLAN, SEGMENT DE DREAPTĂ

1.1 Punct, dreaptă, plan

1.1.1 Ne amintim

Punctul, dreapta și planul sunt noțiuni elementare ale geometriei. Acestea sunt reprezentate prin desene, folosind convenții de reprezentare și de notare.

PUNCTUL

Punctul poate fi asemănat cu urma lăsată de un instrument de scris foarte bine ascuțit, pe suprafața cu care intră în contact.

Punctul se reprezintă geometric printr-o bulină plină, cât mai mică, sau prin intersecția a două linie mici.

Notăm punctele cu litere mari, eventual cu indici: $A, B, C, M, N, P, M_1, M_2, \dots$.

Observație: Punctul este caracterizat doar prin poziție. Punctul nu are dimensiune.

Doză puncte A și B pot fi situate în același loc și spunem că sunt puncte identice sau confundate (coincide), sau pot fi situate în locuri diferite și atunci spunem că sunt puncte distincte (diferente). Dacă punctele A și B coincid, scriem $A = B$, iar dacă sunt distincte, scriem $A \neq B$.

DREAPTĂ

Imaginea unei porțiuni dintr-o dreaptă este ca un fir de ață foarte subțire și bine întins. Considerând porțiunea de dreaptă nemărginită în ambele sensuri, descriem o dreaptă.

O dreaptă este formată dintr-o infinitate de puncte.

Notăm dreptele cu litere mici, eventual cu indici: a, b, c, \dots sau d_1, d_2, d_3, \dots .

Notăm punctele a două litere mari care numesc două puncte distincte ale dreptei: AC, MN, PQ, \dots

Pe lângă reprezentarea unei porțiuni de dreaptă, utilizăm și notația integrală.

Dreapta este nemărginită, nestăruită în ambele părți, deci nu va putea fi reprezentată integral.

Urmo lăsată de instrumentul de scris care se deplasează, sprinzându-se pe rigla, este reprezentarea geometrică a unei drepte.

1.1.2 Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Doză dreptele d_1 și d_2 pot avea toate punctele comune (dreptele coincide) și spunem că în acest caz dreptele sunt identice sau confundate.

Dacă d_1 și d_2 sunt identice, atunci scriem $d_1 = d_2$.

Dacă dreptele d_1 și d_2 care nu sunt identice sunt drepte distincte (diferente). Dacă d_1 și d_2 sunt distincte, atunci scriem $d_1 \neq d_2$.

Dictionar

Identice = înțelegere, acord cu privire la anumite probleme sau anumite obiective.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

Imagini sugestive

Știți că...?

PLANUL

Imaginea unei porțiuni dintr-un plan este ca suprafața sticlei colorate a unui geom sau ca suprafața unei mese. Considerând porțiunea de plan nemărginită în orice direcție, obținem desenele unui plan.

Planul se reprezintă, prin desen, sub forma unui paralelogram.

Planele se notează cu litere mici, eventual cu indici: p, q, r, \dots , sau p_1, p_2, p_3, \dots sau cu litere din alfabetul grecesc: α (alfa), β (beta) și γ (gamma), etc. (p...).

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Observați în imagine Palatul Culturii din Iași. Am evidențiat trei puncte (cu roșu), două drepte (cu roșu) și un plan (cu mov). Identificați alți patru puncte, patru drepte și patru plane.

Urmăriți cu un indicator sau cu degetul pe imagine elementele identificate.

2. a) Desenați și notați punctele identice M și N .
b) Desenați și notați punctele diferite P și Q .

3. Reprezentați și notați dreptele distincte AB, AC, AD .

4. a) Stînd că fiecare față a unui paralelipiped este o porțiune dintr-un plan, fiecare vîrf este un punct și că fiecare muchie este o porțiune de dreaptă, numiți B puncte și 12 drepte distincte, folosind imaginaie alturată.

Știți că...?

Palatul Culturii din Iași reprezintă o împelire armonioasă a mai multor stiluri arhitecturale: neogotic, romantic, baroc.

Dictionar

PAGINI DE LECȚII (CONȚINUT)

Minitest

Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

a) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima volumul unei cutii de bomboane, este:

(1p) A. milimetrul cub; B. centimetrul cub; C. decimetrul cub; D. metrul cub.

(1p) b) Un decimetru cub este egal cu:

(1p) A. 10 cm³; B. 10 dm³; C. 10³ cm³; D. 10000 cm³.

(1p) c) Unitatea de măsură de o mie de ori mai mare decât milimetrul cub este:

(1p) A. decimetrul cub; B. decimetrul cub; C. metrul cub; D. centimetrul cub.

2. Efectuați calculele și exprimați rezultatul în metri cubi:

(1p) a) 500 · 4,3 dm³ + 32,5 · 10³ cm³ = 0,021 dam³.

3. În desenul alăturat sunt reprezentate un cub și un paralelipiped dreptunghic.

(1p) a) Calculați volumele celor două corpuri.

(1p) b) Adăți de câte ori este mai mare volumul paralelipipedului decât volumul cubului.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/ autoevaluare

Test de evaluare/autoevaluare

Subiectul 1
Completati, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

(1p) 1. 30 dam = 3000 cm = ... m.

(1p) 2. 0,045 km + 10³ cm = 56 m = ... dam.

(1p) 3. 250 dm³ + 0,00003 ha = ... m³.

(1p) 4. 54 dam³ + 4500 mm³ = ... cm³.

Subiectul al II-lea
Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

(1p) 1. Perimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile 56 cm și 3,2 dm este:

(1p) A. 160 cm; B. 17,6 dm; C. 1,67 m; D. 88 cm.

(1p) 2. În apartament are trei camere cu suprafețe de 14 m², 15,6 m² respectiv 0,18 dam². În cele trei camere, se montează parchet. Știind că un metru pătrat de parchet costă 62,5 lei, atunci suma plătită pentru toată suprafața este:

(1p) A. 2925 lei; B. 2950 lei; C. 2975 lei; D. 3025 lei.

(1p) 3. Volumul unei cutii cu lungimea 30 cm și lățimea 20 cm este 15000 cm³. Înălțimea cutiei este:

(1p) A. 25 cm; B. 15 cm; C. 35 cm; D. 18 cm.

Subiectul al III-lea
Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

(1p) 1. Un pătrat și un dreptunghi au perimetrele egale. Se știe că pătratul are aria 144 cm², iar lungimea dreptunghiului este cu 0,20 m mai mare decât lățimea. Afiați:

(1p) a) latura pătratului și perimetrul dreptunghiului;

(1p) b) dimensiunile și aria dreptunghiului.

(1p) 2. Un teren agricol de 1 ha este împărțit în două parcele, una dintre ele având aria 36 000 m². Din parcele cu suprafața mai mare, se ară 20%, iar din cealaltă parcelă se ară 30%.

(1p) a) Precizați dacă suprafețele arate sunt egale.

(1p) b) Calculați aria suprafeței care mai rămâne de arat, în cele două parcele.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Punctaj

Test de evaluare sumativă

Test de evaluare sumativă

Subiectul 1. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

(1p) 1. Rezultatul calculului 1 dam + 1 hm + 1 km, exprimat în metri, este:

(1p) A. 111 m; B. 31,1 m; C. 1110 m; D. 1,11 m.

(1p) 2. Un fermier cumpără două terenuri alăturate, având ariele 0,1 ha, respectiv 5 ar.

(1p) A. 150 m²; B. 1500 m²; C. 15 m²; D. 15 000 m².

(1p) 3. Dintr-o coală de hârtie dreptunghilă cu dimensiunile 20 cm și 15 cm, decupăm un pătrat cu latura 10 cm. Suprafața rămasă are aria:

(1p) A. 200 cm²; B. 250 cm²; C. 225 cm²; D. 25 cm².

Subiectul al II-lea. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

(1p) 1. Dintr-un pătrat cu perimetrul 120 cm, se decupează o fișe cu lățimea de 22,5 cm, ca în imaginea alăturată. Calculați aria pătratului rămas.

(1p) 2. Un dreptunghi, care nu este pătrat, s-a format prin alăturarea a patru pătrate cu laturile de aceeași lungime. Suma perimetrelor tuturor pătratelor este 128 cm. Afiați dimensiunile și aria dreptunghiului.

(1p) 3. Sonia a format un segment, punând cap la cap un bețșor cu lungimea 1 cm, două bețșoare cu lungimea 2 cm și trei bețșoare cu lungimea 3 cm. Știind că mijlocul segmentului format reprezintă punctul de întâlnire a două bețșoare, reprezentat printr-un desen model în care s-a arătat Sonia bețșoarele.

(1p) 4. Unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ nu au două câte două puncte interioare comune, iar $\angle AOD = 150^\circ$. Afiați măsurile celor trei unghiuri, știind că $\angle AOB = \angle BOC = 10^\circ + \angle COD = 20^\circ$.

(1p) 5. Florin toarnă 3,2 litri apă într-un vas în formă de cub cu muchia 16 cm.

(1p) a) Calculați înălțimea la care s-a umplut vasul, știind că vasul stă pe o suprafață orizontală.

(1p) b) Afiați câți litri de apă trebuie să adăugăm pentru ca vasul să fie plin.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este de 60 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Ne amintim	concepte, cunoștințe pe care elevii le-au dobândit în lecții anterioare, în scopul valorificării achizițiilor acestora și vizând identificarea firească a noilor conținuturi prin conexiuni logice
Rezolvăm și observăm	exerciții/probleme relevante pentru identificarea sau deducerea unor elemente noi pe baza observației: proprietăți, algoritmi, implicații
Descoperim, înțelegem, exemplificăm	conținuturile prevăzute de programa școlară, însoțite de exemple concludente, comentarii, modele de rezolvare
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni	aplicații rezolvate, unele rezultate matematice remarcabile care realizează conexiuni între elementele de conținut din lecție, achiziții anterioare și viața cotidiană
Aplicație practică	activitate de grup sau individuală care presupune realizarea unor sarcini de lucru descrise
Temă de portofoliu	activitate individuală sau de grup, care constă în parcurgerea unor etape descrise, folosind modelele prezentate în manual
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm	activități eșalonate în funcție de gradul de dificultate și de parcurgerea conținuturilor în cadrul unității de învățare
Minitest/ Test de autoevaluare	itemi de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi

VARIANTA DIGITALĂ



Varianta digitală cuprinde integral conținutul manualului în variantă tipărită, având în plus exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme și simulări. Toate acestea au obiectivul de a aduce un plus de valoare cognitivă.

Paginile din manual pot fi vizionate pe desktop, laptop, tabletă, telefon, oferind o experiență excelentă de navigare. Navigarea în varianta digitală permite parcurgerea manualului și revizuirea activității de învățare prezentă.

AMII static



Cuprinde: desene, fotografii, simboluri, informații suplimentare.

AMII animat



Cuprinde animații sau filme.

AMII interactiv



Cuprinde exerciții de alegere duală, de alegere multiplă, de asociere, de completare, de ordonare etc.

Instrucțiuni de utilizare a manualului digital

Butonul AJUTOR deschide ghidul de utilizare a manualului digital.

Butonul CUPRINS deschide cuprinsul manualului digital și permite deschiderea de conținuturi/lecții.

Butoanele de navigare permit parcurgerea manualului și deschiderea unei anumite pagini.

Activități de tip static – deschide activități de tip static, care se derulează cu ajutorul butoanelor de navigare.

Activități de tip animat – indică elemente care se găsesc în partea de jos a paginii. Pentru vizionare, se activează butonul Redă.

Activități de tip interactiv – indică elemente situate în partea de jos a paginii, de tipul: *Asociază*, *Bifează*, *Scrie de la tastatură*, *Selectează*. Butoanele de validare sunt: *Resetează* (care aduce exercițiul la starea lui inițială) și *Verifică* (prin care se verifică rezolvarea). Utilizatorul are la dispoziție trei încercări de a răspunde corect, după care răspunsul corect este afișat automat.

CUPRINS



PROBLEME RECAPITULATIVE 9 TESTE INIȚIALE 14

Test de evaluare inițială nr. 1	14
Test de evaluare inițială nr. 2	14



CAPITOLUL I NUMERE NATURALE

1 NUMERE NATURALE 16

L1 Scrierea și citirea numerelor naturale	16
L2 Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor	20
L3 Compararea și ordonarea numerelor naturale	23
L4 Aproximări. Estimări	26
Test de evaluare/autoevaluare	28

2 OPERAȚII CU NUMERE NATURALE. PROPRIETĂȚI ... 29

L1 Adunarea numerelor naturale. Proprietăți	29
L2 Scăderea numerelor naturale	31
L3 Înmulțirea numerelor naturale	33
L4 Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale	36
L5 Împărțirea cu rest a numerelor naturale	39
Test de evaluare/autoevaluare	41

3 PUTERI CU EXPONENT NATURAL ALE UNUI NUMĂR NATURAL 42

L1 Puterea cu exponent natural a unui număr natural ...	42
L2 Reguli de calcul cu puteri	45
L3 Compararea puterilor numerelor naturale.....	47
L4 Pătratul unui număr natural	49
L5 Scrierea numerelor naturale în baza 10. Scrierea numerelor naturale în baza 2	52
L6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	54
Test de evaluare/autoevaluare nr. 1	57
Test de evaluare/autoevaluare nr. 2	57

4 METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR.. 58

L1 Metoda reducerii la unitate	58
L2 Metoda comparației.....	61
L3 Metoda figurativă.....	64
L4 Metoda mersului invers	66
L5 Metoda falsei ipoteze	69
Test de evaluare/autoevaluare	71

5 DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE 72

L1 Divizor al unui număr natural. Multiplu al unui număr natural	72
L2 Divizor comun. Multiplu comun	76
L3 Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 10 ⁿ	79
L4 Criteriul de divizibilitate cu 3. Criteriul de divizibilitate cu 9	82
L5 Numere prime. Numere compuse	84
Test de evaluare/autoevaluare	88
Test de evaluare sumativă	89



CAPITOLUL II FRAȚII ORDINARE

1 FRAȚII ORDINARE 92

L1 Frații ordinare. Frații subunitare, fracții echiunitare, fracții supraunitare.....	92
L2 Frații echivalente	95
L3 Compararea fracțiilor	97
L4 Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor ordinare. Ordonarea fracțiilor ordinare	100
L5 Scoaterea întregilor din fracție, introducerea întregilor în fracție	102
L6 Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale	105
L7 Amplificarea fracțiilor ordinare. Simplificarea fracțiilor ordinare.....	107
L8 Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun.....	110
Test de evaluare / autoevaluare	113

2 OPERAȚII CU FRAȚII ORDINARE.. 114

L1 Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.....	114
L2 Înmulțirea fracțiilor ordinare	118
L3 Frații dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară. Procente	122
L4 Împărțirea fracțiilor ordinare	125
L5 Ridicarea la putere a unei fracții ordinare	128
Test de evaluare / autoevaluare	130
Test de evaluare sumativă	131



CAPITOLUL III FRAȚII ZECIMALE

1	FRAȚII ZECIMALE	134
L1	Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale. Transformarea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule în fracții ordinare	134
L2	Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale	137
L3	Aproximări. Reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule	139
	Test de evaluare / autoevaluare	142
2	OPERAȚII CU FRAȚII ZECIMALE	143
L1	Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule	143
L2	Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule	147
L3	Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multe numere naturale	150
L4	Transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate	152
L5	Împărțirea a două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule	155
L6	Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară	158
L7	Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive	160
L8	Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură	164
	Test de evaluare/autoevaluare	168
3	PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR	169
L1	Probleme de organizare a datelor; frecvență	169
L2	Grafice cu bare și/sau cu linii. Media unui set de date statistice	171
	Test de evaluare / autoevaluare	174
	Test de evaluare sumativă	175

PROBLEME DE SINTEZĂ

CĂLĂTORIE IMAGINARĂ PRIN EUROPA

EVALUARE FINALĂ

Test de evaluare/autoevaluare nr. 1

Test de evaluare/autoevaluare nr. 2

Test de evaluare/autoevaluare nr. 3

RĂSPUNSURI



CAPITOLUL IV ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1	PUNCT, DREAPTĂ, PLAN, SEMIDREAPTĂ, SEMIPLAN, SEGMENT DE DREAPTĂ	178
L1	Punct, dreaptă, plan	178
L2	Poziții relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare	180
L3	Semidreaptă. Segment de dreaptă. Semiplan	183
L4	Poziții relative a două drepte	186
L5	Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment. Segmente congruente	188
L6	Mijlocul unui segment	192
	Test de evaluare/autoevaluare	194
2	UNGHIIURI	195
L1	Definiție, notații, elemente; interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi	195
L2	Măsura unui unghi	198
L3	Clasificări de unghiuri. Unghiuri congruente	200
L4	Calcul cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale	203
	Test de evaluare/autoevaluare	207
3	FIGURI CONGRUENTE. AXĂ DE SIMETRIE	208
L1	Figuri congruente	208
L2	Axă de simetrie	211
	Test de evaluare / autoevaluare	215
4	UNITĂȚI DE MĂSURĂ	216
L1	Unități de măsură pentru lungime	216
L2	Unități de măsură pentru arie	220
L3	Unități de măsură pentru volum	224
	Test de evaluare/autoevaluare	228
	Test de evaluare sumativă	229

Competențe generale și competențe specifice

- 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar**
 - 1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate
 - 1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate
 - 1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte
- 2. Prelucrarea unor date de tip cantitativ, calitativ, structural, specifice matematicii, cuprinse în diverse surse informaționale**
 - 2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora
 - 2.2. Efectuarea de calcule cu fracții ordinare sau zecimale, folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice
 - 2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice
- 3. Utilizarea conceptelor și algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
 - 3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate
 - 3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale
 - 3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare
- 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
 - 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparații, aproximări și estimări ale rezultatelor unor operații cu numere naturale
 - 4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date
 - 4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură
- 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
 - 5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
 - 5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule
 - 5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată
- 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
 - 6.1. Modelarea matematică folosind numere naturale a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului
 - 6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.)
 - 6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unitățile de măsură și la interpretarea rezultatelor



PROBLEME RECAPITULATIVE

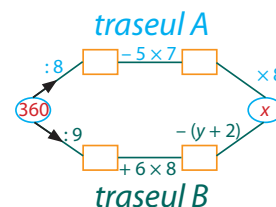
TESTE INIȚIALE



Probleme recapitulative

- Copiați pe caiete, efectuați calculul și completați rezultatul corect:
 - $587 + 9678 = \dots$
 - $2004 - 1376 = \dots$
 - $68 \times 94 = \dots$
 - $752 : 8 = \dots$
- Efectuați calculele și decideți dacă afirmația este adevărată sau falsă.
 - $99 + 999 + 9999 = 1000 \times 11 + 87$;
 - $9999 - 888 - 77 - 6 = 4 \times 2022 + 4 \times 235$;
 - $7080 : 59 + 8400 : 140 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$.
- Aflați numărul necunoscut, din fiecare egalitate, folosind proba operației întâlnite:
 - $a + 5608 = 11011$;
 - $2875 - a = 928$;
 - $a - 634 = 63 \times 34$;
 - $b \times 57 = 1083$;
 - $14 \times (b + 7) = 532$;
 - $(b - 45) \times 39 = 1482$;
 - $c : 43 = 34$;
 - $(c - 89) : 3 = 37$;
 - $2022 : (c + 37) = 6$.
- La o împărțire, deîmpărțitul este 329, câtul este 8, iar restul este 1. Aflați împărțitorul.
- Sala Polivalentă din Timișoara are 4800 de locuri. Pentru un spectacol, s-au vândut 1345 de bilete cu prețul 24 lei și 2056 de bilete cu prețul 35 lei.
 - Calculați numărul biletelor vândute.
 - Aflați numărul locurilor rămase neocupate.
 - Calculați suma încasată pentru biletele vândute.

- Efectuați calculele:
 - $4000 + 83 \times 24 - 167 \times 32$;
 - $2700 - (18 \times 100 + 237)$;
 - $377 + 5 \times [2048 : 32 - 6 \times (23 - 117 : 9)]$.
- Parcurgând „traseul A” aflați numerele care trebuie scrise în căsuțele libere și numărul x.
 - Parcurgând „traseul B” aflați numerele care trebuie scrise în căsuțele libere și numărul y.



- Un număr este de trei ori mai mare decât altul, iar diferența celor două numere este 2022. Aflați numerele.
- Paul, tatăl și bunicul lui au împreună 104 ani. Aflați vârsta fiecăreia, știind că Paul are un sfert din vârsta tatălui, iar tatăl lui Paul are jumătate din vârsta bunicului.
- Sandu vrea să cumpere un aparat de fotografiat, care costă 172 lei. În magazin află că aparatul de fotografiat s-a ieftinit cu o pătrime din valoare. Aflați prețul plătit de Sandu pentru aparatul de fotografiat.
- Calculați lungimea gardului care înconjoară curtea școlii în care învață Elena, știind că are lungimea de 240 m și lățimea cu 60 m mai mică.

12. Ana și Maria au împreună 450 de lei. Dacă Ana ar împrumuta-o pe Maria cu 75 de lei, atunci ele ar avea sume egale de bani. Aflați ce sume de bani are fiecare.

13. Copiați pe caiete, efectuați calculele și completați rezultatul corect.

- a) $72 \text{ m} + 185 \text{ dm} + 1000 \text{ cm} = \dots \text{ cm};$
- b) $20 \text{ kg} - 15600 \text{ g} = \dots \text{ g};$
- c) $3 \text{ săptămâni} + 1200 \text{ minute} = \dots \text{ ore};$
- d) $11 + 56 \text{ hl} - 4 \text{ kl} = \dots \text{ l}.$

14. Un tren de marfă cu 36 vagoane transportă grâu și porumb. Se știe că două treimi dintre vagoane sunt încărcate cu grâu, cantitatea de grâu din fiecare vagon fiind de 15 tone (t), celelalte vagoane sunt încărcate cu porumb, cantitatea de porumb din fiecare vagon fiind de 210 chintale (q). Aflați cantitatea totală de de grâu și porumb transportată.



15. Calculați durata deplasării unui autocar de la Sibiu la Constanța, dacă a plecat din Sibiu la ora 9 și 45 minute și a ajuns la Constanța la ora 14 și 18 minute.

16. Din merele culese, Dan îi oferă Mariei trei zecimi dintre acestea și rămâne cu 14 mere. Aflați numărul merelor culese de Dan și numărul merelor oferite Mariei.

17. Pentru centrul de documentare al unei școli, s-au cumpărat 21 dulapuri și 28 birouri care au costat în total 24 752 lei. Știind că 6 birouri costă cât 2 dulapuri, aflați prețul plătit pentru un dulap și prețul plătit pentru un birou.

18. Ionel scrie pe un bilețel patru numere diferite, fiecare având două cifre, apoi spune: „Dacă adun cifrele unităților celor patru numere obțin 30, iar dacă adun cifrele zecilor celor patru numere obțin 36.” Aflați numerele pe care le-a scris Ionel pe bilețel.

19. Tudor așază, la întâmplare, 21 de creioane în trei cutii. Apoi, ia din prima cutie cinci creioane

și le pune în a doua cutie. Din a doua cutie, ia patru creioane și le pune în a treia cutie. Numără creioanele din fiecare cutie și vede că sunt distribuite în mod egal. Aflați câte creioane a pus, la început, în fiecare cutie.

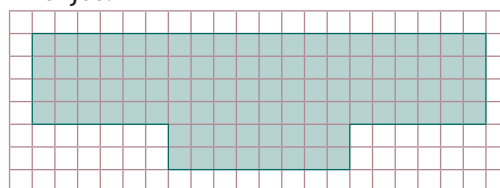


20. Emil vizitează un oraș și se deplasează de la obiectivul turistic A, la obiectivul turistic B. După ce a parcurs o șeptime din drum și încă jumătate din rest, constată că mai are de parcurs 402 m. Aflați distanța dintre cele două obiective turistice.

21. La o florărie s-au adus 720 de fire de flori: trandafiri, crizanteme și garoafe. Dacă numărul trandafirilor este de trei ori mai mare decât cel al garoafelor, iar crizanteme sunt cu 72 mai multe decât diferența dintre numărul trandafirilor și cel al garoafelor, aflați câte flori de fiecare fel s-au adus.



22. a) Realizați pe caiete, folosind caroiajul paginii, un desen asemănător cu cel din imaginea de mai jos.



b) Măsurați cu rigla gradată segmentele care apar în desen și marcați-le cu aceeași culoare pe cele care au aceeași lungime.

c) Calculați perimetrul figurii geometrice desenate, folosind măsurătorile făcute, exprimate în centimetri.

d) Calculați aria suprafeței mărginite de figura geometrică desenată considerând unitatea de măsură un pătrățel al caroiajului.



23. Tabelul de mai jos prezintă date despre evoluția vremii pe parcursul unei săptămâni în orașul în care locuiește Elena.

	Luni 	Marți 	Miercuri 	Joi 	Vineri 	Sâmbătă 	Duminică 
Temperatura maximă	21° C	16° C	19° C	23° C	26° C	21° C	17° C
Cantitate precipitații pe metru pătrat	0 ml	2500 ml	2250 ml	0 ml	0 ml	0 ml	1900 ml
Acoperire cu nori	40%	100%	100%	60%	0%	50%	100%
Direcția vântului	–	N	NE	NE	E	E	NE
Viteza vântului	–	15 km/h	20 km/h	10 km/h	5 km/h	7 km/h	12 km/h

a) Cu ajutorul datelor din tabel, precizați:

- a₁) zilele în care temperatura maximă a fost sub 20° C;
- a₂) zilele în care nu au fost precipitații;
- a₃) ziua în care cerul nu a fost acoperit cu nori;
- a₄) numărul zilelor în care vântul a avut direcția Nord, Nord-Est.

b) Enumerați zilele săptămânii în ordinea descrescătoare a vitezei vântului.



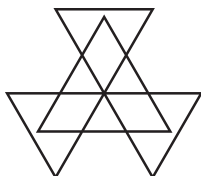
24. Teo, Elena și Florin parcurg o parte din drumul spre școală împreună. Teo pleacă prima de acasă, merge 560 de metri singură, se întâlnește cu Elena și merg împreună 38 dam, până la casa lui Florin. Cei trei colegi parcurg împreună până la școală 12 500 cm. Calculați:



- a) distanța parcursă de Teo până la școală;
- b) distanța pe care o parcurge Elena dus-întors, într-o zi de școală.

25. Simona a schimbat o bancnotă de 200 lei în bancnote cu valoare mai mică: 100 lei, 50 lei, 10 lei, 5 lei. Știind că a primit în total 10 bancnote, cel puțin una de fiecare fel, determinați numărul bancnotelor de 5 lei.

26. Observați desenul de mai jos și precizați numărul triunghiurilor desenate.



27. Pentru decorarea unei săli de festivități s-au folosit baloane galbene, roșii și albastre. Numărul baloanelor roșii este de trei ori mai mare decât cel al baloanelor galbene, iar numărul baloanelor albastre este jumătate din numărul baloanelor roșii și galbene la un loc. Știind că s-au folosit în total 96 baloane, aflați numărul baloanelor de fiecare culoare.

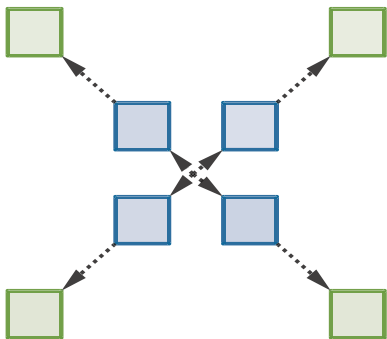


28. Vlad aruncă două zaruri de mai multe ori. La fiecare aruncare, scrie numerele de două cifre corespunzătoare numărului de puncte arătate de cele două zaruri. De exemplu, dacă la o aruncare, un zar arată 3 puncte și celălalt arată 6 puncte, se obțin numerele 36 și 63.



- a) Scrieți numerele de două cifre egale care se pot forma.
- b) Scrieți numerele obținute la două dintre aruncări, știind că sunt formate cu cifre consecutive și că suma lor (a celor patru numere) este 88.

29. Realizați pe caiete un desen precum cel de mai jos.



Completați în fiecare casetă câte o cifră dintre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, astfel încât:

- suma cifrelor din colțuri și suma cifrelor de pe fiecare diagonală să fie aceeași;
- cele 8 cifre să fie distincte.

Precizați dacă există mai multe variante de completare.

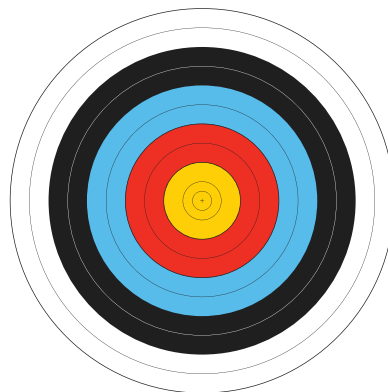
30. Sandu se pregătește să plece în excursie. Își propune să pună în rucsac obiecte care cântăresc împreună cel mult 3 kilograme.

Are de ales obiecte dintre cele ilustrate.

130 dag	1 kg	2 × 300 g	70 dag
4 hg	350 g	220 g	450 g

- a) Calculați masa rucsacului lui Sandu, dacă acesta alege cât mai multe obiecte posibile.
- b) Precizați obiectele pe care le va pune Sandu în rucsac, știind că masa lor este chiar 3 kg și că nu va renunța la tricouri.
31. În grădina lui Gelu se află un măr care are 8 brațe, fiecare braț are 6 ramuri și fiecare ramură are câte 5 crengi. Dacă pe fiecare creangă sunt între trei și cinci mere, aflați numărul maxim de mere pe care le poate culege Gelu.
32. Aflați numerele, cel mai mic și cel mai mare, care se pot forma cu cifrele a, b, c, d , știind că $a \times b + c \times d = 26$.

33. Marius trage cu arcul la țintă. Se obțin 10 puncte dacă nimereste în zona albă, 25 de puncte dacă nimereste pe negru, 40 de puncte dacă nimereste pe albastru, 75 de puncte dacă nimereste roșu, 100 de puncte dacă nimereste pe galben și 0 puncte dacă nimereste în exteriorul benzilor enumerate. După cinci trageri, Marius a obținut 425 de puncte. Aflați de câte ori a nimerit zona galbenă. Analizați toate cazurile posibile.



34. Două grupuri de copii, fete și băieți, au urcat cu telesaunul la o pârtie de schi. În fiecare grup sunt 20 de fete, restul sunt băieți. Pe fiecare telesaun pot sta cel mult 4 copii.

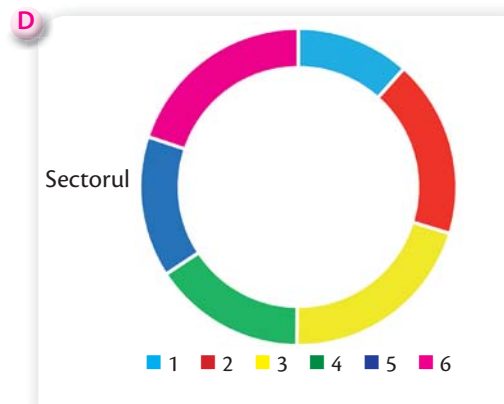
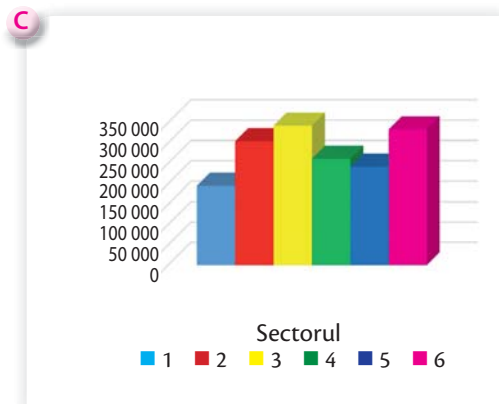
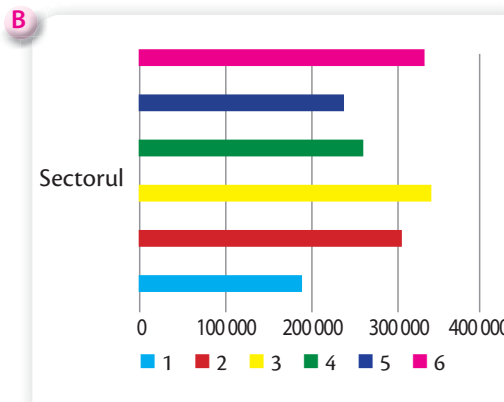
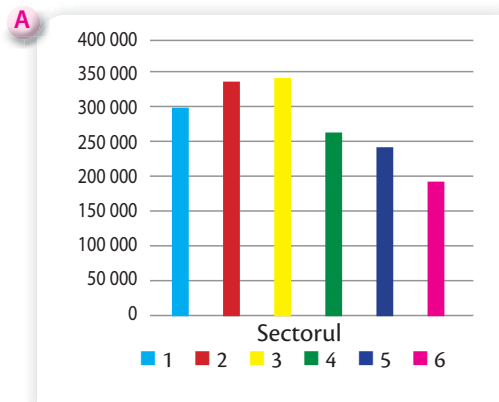


- a) Aflați câte telesaune a folosit primul grup, dacă numărul băieților din grup este de trei ori mai mare decât cel al fetelor.
- b) Aflați câți băieți sunt în al doilea grup, dacă numărul telesaunelor ocupate complet a fost 9, iar în două telesaune au urcat câte trei copii.
35. La festivitatea de premiere a elevilor unei școli au venit 135 de părinți, fiecare cu încă doi membri ai familiei. Știind că sala de festivități a școlii are 18 rânduri și că fiecare rând are 24 de locuri, aflați numărul locurilor neocupate.

36. Maria s-a informat și a aflat date referitoare la populația orașului București. Aceasta le-a scris într-un tabel precum cel de mai jos.

Sectorul	1	2	3	4	5	6
Numărul de locuitori	194 608	304 523	342 541	261 306	241 585	333 422

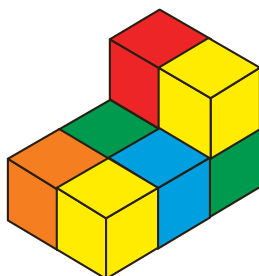
Care dintre graficele următoare NU conține reprezentarea corectă a populației fiecărui sector?



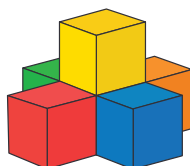
37. Alege răspunsul corect pentru fiecare dintre imaginile de mai jos.

Numărul cuburilor cu care s-a realizat corpul din imagine este:

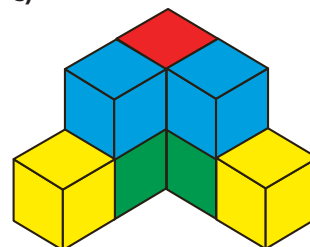
a)



b)



c)



7 10 8 12 9

7 10 8 12 6

7 10 8 12 9

Test de evaluare inițială nr. 1

Subiectul I

(30p)

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți numai rezultatele.

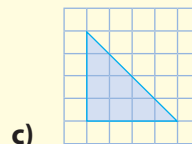
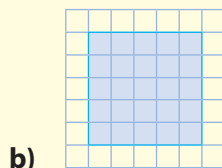
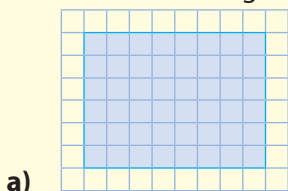
- (5p) 1. Suma numerelor 4958 și 767 este
(5p) 2. Diferența numerelor 5049 și 2337 este
(10p) 3. Produsul numerelor 15 și 276 este
(10p) 4. Câțul împărțirii numerelor 196 și 7 este

Subiectul al II - lea

(60p)

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (10p) 1. Triplul numărului a este 603. Calculați numărul mai mare decât a cu 799.
(10p) 2. Sfertul unui număr este 29. Calculați produsul numărului cu dublul lui 92.
(10p) 3. Dacă $a + b + 77 = 707$, calculați $6300 - (a + b)$.
(15p) 4. Se consideră numerele $n = 500 - 16 \times (344:8 - 13)$ și $m = 2 + 2022 : (34 \times 43 - 16 \times 91)$.
Aflați numerele n și m , apoi restul împărțirii numărului m la n .
(15p) 5. Desenați pe caiete și aflați aria fiecăreia dintre figurile geometrice reprezentate, considerând unitatea de arie egală cu un pătrat din rețeaua de pătrate a paginii caietului de matematică.



Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru este 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare inițială nr. 2

Subiectul I

(30p)

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți numai rezultatele.

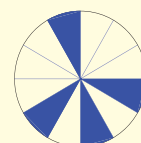
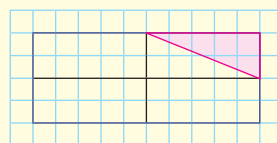
- (5p) 1. Numărul cu 345 mai mare decât 678 este
(5p) 2. Dacă scădem din 1023 numărul 857 se obține
- (10p) 3. Înmulțind cel mai mare număr de trei cifre cu cel mai mic număr natural se obține
- (10p) 4. Numărul care împărțit la 17, dă câțul 21 și restul 9 este

Subiectul al II - lea

(60p)

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (20p) 1. Aflați suma numerelor a , b , c și d , știind că:
a) $3078 + a = 4321$ b) $7206 - b = 3210$ c) $2 \times c \times 17 = 680$ d) $1890 : d = 70$.
- (10p) 2. Scrieți:
a) fracția care reprezintă porțiunea colorată din dreptunghi;
b) fracția care reprezintă porțiunea necolorată din cerc.
- (30p) 3. Cristian are o sumă de bani, iar sora sa Cristina are jumătate din suma lui Cristian și încă 24 de lei. Știind că împreună, cei doi frați au 177 de lei, aflați ce sumă are fiecare.



Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

CAPITOLUL I

NUMERE NATURALE

PROIECT

Curiozități din lumea numerelor naturale



A. Observați imaginile de mai jos.



a) T_1 T_2 T_3 T_4
Numerele reprezentate în aceste imagini se numesc *numere triunghiulare*.
Un număr N este triunghiular dacă $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, adică este suma primelor n numere naturale nenule.



b) P_1 P_2 P_3 P_4
Numerele reprezentate în aceste imagini se numesc *numere pătratice* sau *pătrate perfecte*.

B. Pe parcursul acestui capitol veți învăța ce este un *număr prim*. Pornind de la această noțiune au fost definite anumite tipuri de numere.

- a) *Numere prime gemene* – sunt perechi de numere prime a căror diferență este egală cu 2, cum ar fi 3 și 5 sau 5 și 7.
b) *Numere prietene* – sunt perechi de numere în care fiecare număr este suma divizorilor celuilalt. Prima pereche de numere prietene este cea formată din 220 și 284.
c) Dacă notăm cu S_n suma divizorilor numărului n , din care se exclude numărul însuși, se pot defini următoarele tipuri de numere.

Număr perfect: un număr pentru care $n = S_n$.

Exemplu: $6 = 1 + 2 + 3$.

Număr deficient: un număr pentru care $S_n < n$.

Exemplu: $1 + 2 + 4 < 8$, deci 8 este un număr deficient.

Număr abundent: un număr pentru care $S_n > n$.

Exemplu: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12$, deci 12 este un număr abundent.

Număr puternic - este un număr n care îndeplinește condiția: dacă p este un divizor al lui n , atunci și p^2 este, de asemenea, divizor al lui n .
Exemplu: $72 = 8 \times 9$, deci divizorii primi ai lui 72 sunt 2 și 3, dar divizorii sunt și 2^2 și 3^2 , deci 72 este un număr puternic.

C. a) Realizați un portofoliu care să cuprindă cele menționate mai sus. Găsiți câte un exemplu pentru fiecare categorie de numere.

b) Căutați informații noi despre numerele naturale și proprietăți ale acestora. Completați portofoliul cu informațiile găsite.

1. NUMERE NATURALE

2. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

3. PUTERI CU EXPONENT NATURAL ALE UNUI NUMĂR NATURAL

4. METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

5. DIVIZIBILITATE

Competențe specifice: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1.



1 NUMERE NATURALE

Scrierea și citirea numerelor naturale



Pentru scrierea numerelor naturale folosim cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Fiecare număr natural se reprezintă (se scrie) printr-o succesiune de cifre, respectând următoarele reguli:

- Cifrele folosite se pot repeta.
- Prima cifră a unui număr de cel puțin două cifre, nu poate fi 0.
- Fiecare cifră reprezintă un anumit ordin, în funcție de poziția pe care o ocupă în scrierea numărului. Ultima cifră reprezintă ordinul cel mai mic (al unităților).
- Fiecare cifră a unui număr, cu excepția ultimei, are ordinul imediat superior cifrei din dreapta sa.
- Cifrele sunt grupate pe *clase* de câte trei cifre; de la dreapta la stânga, se scriu: *clasa unităților* (compusă din ordinul unităților, ordinul zecilor, ordinul sutelor), *clasa miilor* (compusă din ordinul miilor, ordinul zecilor de mii, ordinul sutelor de mii), *clasa milioanei* (compusă din ordinul milioanei, ordinul zecilor de milioane, ordinul sutelor de milioane), ...

Numerele naturale se *citesc* de la stânga la dreapta, precizând ordinul fiecărei cifre nenule (diferită de 0).

Observație. **Scrierea cu cele 10 simboluri, numite cifre arabe, este scrierea în baza 10 sau scrierea în sistemul de numerație zecimal.**

Zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

Exemple: 10 unități = o zece; 10 zeci = o sută; 10 sute = o mie; 10 mii = o zece de mii; 10 zeci de mii = o sută de mii ...



Orice număr natural se scrie în mod unic, ca sumă de unități, zeci, sute, mii, ..., folosind cifrele sale. Această scriere se numește *descompunerea zecimală a numărului*.

Numărul	Clasa miilor			Clasa unităților		
	Cifra sutelor de mii	Cifra zecilor de mii	Cifra miilor	Cifra sutelor	Cifra zecilor	Cifra unităților
530 957	5	3	0	9	5	7

Descompunerea zecimală:

$$530\,957 = 5 \times 100\,000 + 3 \times 10\,000 + 0 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 5 \times 10 + 7$$

Citare: **cinci** sute **treizeci** de mii **nouă** sute **cincizeci** și **șapte**

Observație. Dacă o cifră este **0**, atunci ordinul corespunzător nu se citește.

Scrierea și citirea numerelor naturale mai mari decât 1 000 000, păstrează aceleași principii. Clasa milioanei este formată din ordinul milioanei, ordinul zecilor de milioane, apoi ordinul sutelor de milioane

Numărul	Clasa miliardelor			Clasa milioaneilor			Clasa miilor			Clasa unităților		
	Cifra sutelor de miliarde	Cifra zecilor de miliarde	Cifra miliardelor	Cifra sutelor de milioane	Cifra zecilor de milioane	Cifra milioaneilor	Cifra sutelor de mii	Cifra zecilor de mii	Cifra miilor	Cifra sutelor	Cifra zecilor	Cifra unităților
123 456 539 954	1	2	3	4	5	6	5	3	9	9	5	4

Descompunerea zecimală:

$$123\,456\,539\,954 = 1 \times 100\,000\,000\,000 + 2 \times 10\,000\,000\,000 + 3 \times 1\,000\,000\,000 + 4 \times 100\,000\,000 + 5 \times 10\,000\,000 + 6 \times 1\,000\,000 + 5 \times 100\,000 + 3 \times 10\,000 + 9 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 5 \times 10 + 4.$$

Citire: **o sută douăzeci și trei de miliarde patru sute cincizeci și șase de milioane cinci sute treizeci și nouă de mii nouă sute cincizeci și patru.**

Atunci când dorim să *nu precizăm* cifrele, putem folosi notații de forma \overline{ab} (pentru numerele de două cifre), \overline{abc} (pentru numerele de trei cifre), \overline{abcd} (pentru numerele de patru cifre), ..., unde prin literele a, b, c, d notăm cifrele corespunzătoare ordinului pe care îl reprezintă.

Scierea numărului	Descompunerea zecimală a numărului	
\overline{ab}	a zeci b unități	$a \cdot 10 + b$
\overline{abc}	a sute b zeci c unități	$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$
\overline{abcd}	a mii b sute c zeci d unități	$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$
$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$	a_1 zeci de mii a_2 mii a_3 sute a_4 zeci a_5 unități	$a_1 \cdot 10\,000 + a_2 \cdot 1000 + a_3 \cdot 100 + a_4 \cdot 10 + a_5$
$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$	a_1 sute de mii, a_2 zeci de mii, a_3 mii, a_4 sute, a_5 zeci, a_6 unități	$a_1 \cdot 100\,000 + a_2 \cdot 10\,000 + a_3 \cdot 1000 + a_4 \cdot 100 + a_5 \cdot 10 + a_6$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1

Fie numărul 7689023. Asociați fiecărei *litere* care identifică o cifră a numărului dat, scrisă în coloana **A**, numărul care identifică semnificația acesteia, scrisă în coloana **B**.

Rezolvare

$$(a \rightarrow 7); (b \rightarrow 4); (c \rightarrow 3); \\ (d \rightarrow 1); (e \rightarrow 2); (f \rightarrow 6); (g \rightarrow 5).$$

A	B
a. cifra 7	1. cifra unităților
b. cifra 9	2. cifra zecilor
c. cifra 0	3. cifra sutelor
d. cifra 3	4. cifra miilor
e. cifra 2	5. cifra zecilor de mii
f. cifra 6	6. cifra sutelor de mii
g. cifra 8	7. cifra milioaneilor

Aplicația 2. Determinați cifrele a, b, c, d , folosind descompunerea zecimală a numerelor.

Numărul	Descompunerea zecimală	Cifrele numărului
\overline{ab}	$7 \cdot 10 + 9$	$a = 7; b = 9.$
\overline{abc}	$9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + c$	$a = 9; b = 9; c$ poate fi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
9783	$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$	$a = 9; b = 7; c = 8; d = 3.$

Observație. Numărul \overline{abcd} are \overline{abcd} unități, \overline{abc} zeci, \overline{ab} sute și a mii.

Aplicația 3

a) Scrieți toate numerele naturale de forma $a1b$, știind că $b = a - 2$.

b) Scrieți toate numerele naturale de forma $x52y$, știind că produsul cifrelor sale este 210.

Rezolvare

a) Din $b = a - 2$, folosind faptul că $a \neq 0$, deducem numerele: 210, 311, 412, 513, 614, 715, 816, 917.

b) Din $x \cdot 5 \cdot 2 \cdot y = 210$, rezultă $x \cdot y = 21$. Cum 21 se scrie ca produs de cifre doar în forma $21 = 3 \cdot 7$, rezultă $x = 3$ și $y = 7$ sau $x = 7$ și $y = 3$. Numerele căutate sunt: 3527 și 7523.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Scrieți cu cifre numerele:
 - nouăsprezece mii două sute cincizeci și șapte;
 - un milion două mii trei.
- Scrieți în cuvinte (așa cum citim) numerele 30 408 și 120 089.
- Timeea a scris pe caiet numerele: 2 727, 4 278, 722 700, 10 270, 473 727. Precizați numerele scrise de Timeea, care au cel puțin 1 000 de zeci.
- Scrieți toate numerele de două cifre, care au suma cifrelor egală cu 3.
- Pe tablă este scris numărul 192 837. Copiați pe caiete tabelul și completați în caseta liberă litera A, dacă afirmația este adevărată și litera F, dacă afirmația este falsă.

Propoziția	A/F
Ordinul de mărime al numărului este ordinul zecilor de mii.	
Cifra 2 este cifra miilor.	
Cifra zecilor este 8.	
Numărul miilor este 192.	
Dacă la sfârșitul numărului adăugăm cifra 4, atunci cifra zecilor de mii devine 8.	
- Citiți următoarele numere naturale:
 - 48; 1 064; 9 876; 12 345; 135 791; 123 456 789; 563; 70 700 007;
 - 20; 300; 4 000; 50 060; 876 000; 90 090 009; 1 000 010 001.
- Citiți următoarele lungimi: 4 015 m; 7 376 km; 100 145 dm.
 - Citiți următoarele cantități: 450 g; 3 908 kg; 16 435 dag; 7 077 t.
- Scrieți toate numerele naturale de forma \overline{xyz} , știind că ultima cifră este pară și că suma cifrelor este egală cu 5.
- Scrieți trei numere de forma \overline{abba} cu cifre, apoi scrieți-le în cuvinte.
- Scrieți cu cifre arabe numerele:
 - o sută patruzeci și opt;
 - trei mii o sută optzeci și cinci;
 - douăzeci și șapte de mii opt sute cincizeci și cinci;
 - o mie unu;
 - șase milioane șazeci și șapte;
 - treizeci și trei de milioane o mie doi.
- Precizați ordinul indicat de cifra 7 pentru fiecare dintre numerele: 17; 97 123; 20 070; 7 654 321.

12. a) Știind că $54 = a \cdot 10 + b$, determinați cifrele a și b .
 b) Știind că $987 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, determinați cifrele a, b și c .
13. Scrieți:
 a) toate numerele de trei cifre, care au suma cifrelor 3;
 b) cinci numere naturale care au produsul cifrelor 8.

14. Descoperiți regula și completați fiecare din șirurile următoare cu încă cinci termeni.
 a) 0, 2, 4, 6, ..., .., .., .., .., ..
 b) 23, 25, 27, ..., .., .., .., .., ..
 c) 1, 11, 21, 31, ..., .., .., .., .., ..
 d) 1, 12, 123, 1234, ..., .., .., .., .., ..
15. O carte are 100 pagini.
 a) Aflați câte cifre s-au folosit pentru numerotarea cărții.
 b) Precizați de câte ori s-a folosit cifra 0 în numerotarea paginilor cărții.



Minitest

(30 p) 1. Copiați pe caiete tabelul de mai jos, apoi completați în casetele libere, în cuvinte respectiv cu cifre, numerele corespunzătoare.

a)	Cu cifre	În cuvinte	b)	Cu cifre	În cuvinte	c)	Cu cifre	În cuvinte
		nouăzeci și șapte		2 022				trei mii nouăsprezece

(30 p) 2. Determinați cifrele m, n, p, q , folosind dezvoltarea zecimală a numerelor.

Numărul	Descompunerea zecimală	Cifrele numărului
\overline{pqnm}	$7 \cdot 1000 + 3 \cdot 10 + 5$	$m = \dots \quad n = \dots \quad p = \dots \quad q = \dots$

(30 p) 3. Scrieți toate numerele de trei cifre care au două cifre identice și suma cifrelor 5.

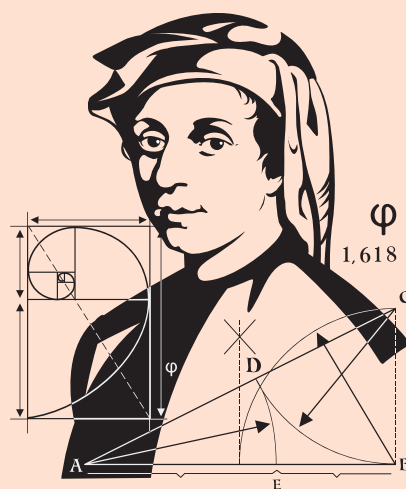
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Puțină istorie

Cifrele arabe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sau cifrele indo-arabe, provin din cultura indiană. Acestea au fost preluate de arabi, care le-au adus în secolul IX în Europa, de unde s-au răspândit în lumea întreagă.

Lucrarea „Deschiderea Universului” (Brahmasphuta-siddhanta) scrisă în anul 628 de matematicianul și astronomul indian Brahmagupta este primul text (cunoscut) în care se introduce numărul 0 și se explică sistemul numeric zecimal indo-arab.

În „Cartea abacului” (Liber Abaci) scrisă în 1202, Leonardo Fibonacci, matematician italian, a introdus și a explicat importanța practică a sistemului de numărare în care numerele sunt scrise cu cifrele 0, 1, 2, ..., 9.



Leonardo Fibonacci



L2 Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor



Ne amintim

Șirul numerelor naturale $0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ este infinit, deci *nu există* un cel mai mare număr natural.

Doi termeni vecini (alăturați) ai acestui șir, n și $n+1$ se numesc *numere naturale consecutive*.

Pentru n și $n+1$, numere naturale consecutive:

- numărul n se numește *predecesorul* numărului $n+1$;
- numărul $n+1$ se numește *succesorul* numărului n .

0 și 1 ; 1 și 2 ; ... 9 și 10 ; ... 100 și 101 sunt perechi de numere naturale consecutive.

n —→ **predecesorul numărului $n+1$**

$n+1$ —→ **succesorul numărului n**



Rezolvăm și observăm

Problemă. Fiecare drum rutier începe dintr-un punct, marcat cu o bornă de tipul celei de mai jos, pe care este indicat „kilometrul zero”. Să ne imaginăm că am plecat de la kilometrul 0 al drumului *rectiliniu* (în linie dreaptă) și că la kilometrul 96 drumul traversează muntele printr-un tunel de lungime 4 km. Știind că la fiecare kilometru este plasată câte o bornă kilometrică, precizați ce scrie pe borna de la ieșirea din tunel.

Soluție. Răspunsul este evident, pe bornă scrie 100 km.

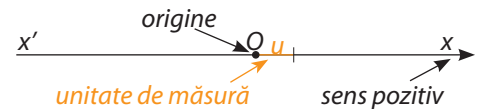
Pentru a răspunde la întrebare, am făcut abstracție de lățimea drumului, considerându-l situat pe o *dreaptă*. A fost important să precizăm: *punctul* corespunzător „kilometrului 0”, din care începem să măsurăm, *sensul* de parcurgere și *unitatea de măsură* (km) în care exprimăm distanța măsurată.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Axa numerelor este o dreaptă pe care:

- s-a fixat un punct O , numit *originea* axei;
- s-a stabilit un *sens pozitiv*, sensul de parcurgere a drepte;
- s-a ales un segment, numit *unitate de măsură*, notat cu u .



Fiecărui număr natural n îi corespunde un singur punct P pe axă.

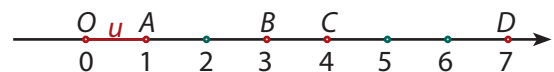
Reprezentarea pe axă a unui număr oarecare n se obține numărând exact n unități de măsură, în sensul pozitiv al axei. În consecință, distanța dintre punctele O și P este de n unități.

- punctul P se numește *reprezentarea pe axă* a numărului natural n .
- numărul natural n este *coordonata* punctului P , pe axă.

Scriem $P(n)$ și citim „ P de coordonată n ” sau „coordonata punctului P este n ”.

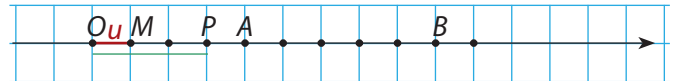
Exemplu.

Pe axa numerelor sunt reprezentate punctele A, B, C, D . Identificăm numerele naturale care sunt coordonatele acestor puncte, apoi completăm tabelul următor.



Reprezentarea pe axă	Numărul reprezentat	Notație	Citire/ interpretare
A	1	A(1)	A de coordonată 1; Coordonata punctului A este 1; Punctul A este reprezentarea pe axă a numărului 1.
B	3	B(3)	B de coordonată 3; Coordonata punctului B este 3; Punctul B este reprezentarea pe axă a numărului 3.
C	4	C(4)	C de coordonată 4; Coordonata punctului C este 4; Punctul C este reprezentarea pe axă a numărului 4.
D	7	D(7)	D de coordonată 7; Coordonata punctului D este 7; Punctul D este reprezentarea pe axă a numărului 7.

Aplicație. Să observăm axa numerelor din desenul alăturat, cu originea O și cu sensul marcat, apoi să precizăm:



- coordonatele punctelor M , P , A și B , dacă *unitatea de măsură* este segmentul OM ;
- coordonatele punctelor P și B , dacă *unitatea de măsură* este segmentul OP .

Soluție. a) $u = OM$, deci $M(1)$. Numărăm unitățile dintre O și P , dintre O și A , apoi dintre O și B . Găsim $P(3)$; $A(4)$; $B(9)$. b) $u = OP$, deci $P(1)$. Observăm că între O și B putem număra trei unități OP , adică $B(3)$.

Comentariu. Aplicația de mai sus demonstrează importanța *unității de măsură* în definirea axei numerelor. Se observă ușor că punctul P are coordonate diferite în cele două situații, la fel și punctul B . Unui număr îi corespunde un singur punct pe axă, dar acest punct depinde de alegerea elementelor axei (origine, sens, unitate de măsură).

Schimbarea unuia dintre elementele axei are ca efect schimbarea axei, a *reperului* la care ne raportăm.

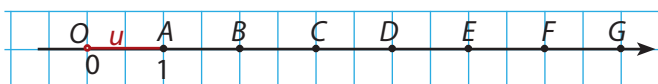


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Adrian a realizat pe caiet desenul de mai jos. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

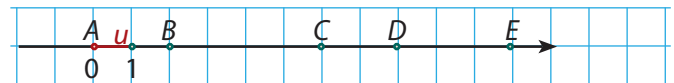


- Dacă unitatea de măsură este egală cu dublul lungimii laturii unui pătrățel, punctul A are coordonata:
A. 6; B. 4; C. 3; D. 2.
 - Dacă unitatea de măsură este egală cu triplul lungimii laturii unui pătrățel, punctul B are coordonata:
A. 2; B. 4; C. 3; D. 6.
- Observați axa numerelor cu originea O , din desenul de mai jos, apoi precizați:



- coordonata punctului O ;
- coordonatele punctelor B , D , F , G .

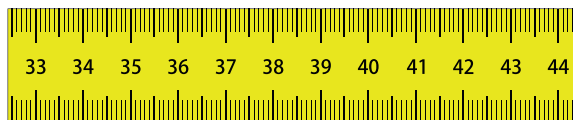
- literele cu care sunt notate punctele corespunzătoare numerelor 0, 1, 3, respectiv 5.
- Considerând unitatea de măsura 5 mm, reprezentați pe axă numerele naturale: 2; 6; 0; 10; 9; 14.
 - Observați reprezentarea următoare, copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera A , dacă propoziția este adevărată și litera F , dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F
Originea axei este punctul A.	
Punctul D are coordonata 8.	
Toate punctele reprezentate pe axă au coordonatele numere naturale pare.	
Numărul 10 este coordonata punctului E.	



5. Reprezentați pe axa numerelor:
- trei numere impare diferite, care au suma 13;
 - trei numere pare diferite, care au produsul 16. Analizați toate situațiile posibile.
 - numărul 1, predecesorul numărului 4 și succesorul numărului 6.
6. Rigla lui Ionel care avea 50 de cm s-a rupt și acum arată precum cea din imaginea de mai jos.



- Precizați câte numere naturale erau pe rigla inițială, în plus față de cele care au rămas.
 - Dacă Ionel renumerează bucata de riglă rămasă, gradația 33 devenind gradația 1, precizați care va fi cel mai mare număr scris pe riglă.
7. Autostrada A1 este o autostradă din România și în prezent (anul 2022) are trei segmente funcționale. Unul dintre ele leagă capitala țării, București (kilometrul 0), de orașul Pitești (kilometrul 110). Ne imaginăm că există pistă pentru biciclete de-a lungul autostrăzii. Emil pleacă cu bicicleta dintr-o parcare situată la kilometrul 36 al autostrăzii București – Pitești și se deplasează cu viteza de 30 km/oră.



Scrieți pe caiete următoarele propoziții și completați spațiile libere așa încât să obțineți propoziții adevărate.

- Dacă se deplasează spre Pitești, după două ore Emil ajunge la kilometrul ...
- Dacă se deplasează spre București, după 30 de minute Emil ajunge la kilometrul ...
- Reprezentați pe axa numerelor, alegând unitatea potrivită, punctul corespunzător locului de plecare și punctul corespunzător locului de sosire, pentru fiecare din sub-punctele a) și b).



Minitest

Alegeți varianta corectă de răspuns.

(30 p) 1. Originea axei numerelor are coordonata:

- A.** 2; **B.** 1; **C.** 0; **D.** 5.

(30 p) 2. Distanța de la originea axei la punctul $M(7)$ este:

- A.** 5 unități; **B.** 3 unități; **C.** 0 unități; **D.** 7 unități.

(30 p) 3. Punctele situate pe axa numerelor la distanța 2 unități de $M(7)$ au coordonatele:

- A.** 3 și 5; **B.** 5 și 9; **C.** 5 și 7; **D.** 7 și 9.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L3 Compararea și ordonarea numerelor naturale



Ne amintim

Pentru orice două numere naturale a și b , are loc una și numai una dintre *relațiile*: $a < b$ (a mai mic decât b) sau $a = b$ (a egal cu b) sau $a > b$, (a mai mare decât b).

Numărul a este *mai mic sau egal* cu b și scriem $a \leq b$, dacă $a < b$ sau $a = b$.

Numerele mai mici sau egale cu 5 sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Numărul a este *mai mare sau egal* cu b și scriem $a \geq b$, dacă $a > b$ sau $a = b$.

Numerele mai mari sau egale cu 5 sunt: 5, 6, 7, ...

A compara două numere naturale a și b înseamnă a stabili care dintre relațiile $a < b$, $a = b$, $a > b$ are loc.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În practică, obișnuim să comparăm și să ordonăm dimensiuni ale obiectelor, cantități, intervale de timp, valori ale unor mărimi, toate acestea fiind exprimate prin numere.

Dacă numerele sunt cunoscute, atunci le comparăm folosind regula cunoscută din clasele anterioare:

- Dacă a și b nu au același număr de cifre, atunci este mai mare numărul care are mai multe cifre.
- Dacă a și b au același număr de cifre, atunci se compară cifrele, de la stânga la dreapta, până când se identifică prima pereche de cifre de același ordin, distincte. Este mai mare numărul care are, în această etapă, cifra cea mai mare.

Dacă $a = 1750$ și $b = 20320$, numărul a are 4 cifre, iar numărul b are 5 cifre și $4 < 5$, deci $a < b$

1. Numerele $a = 3750$ și $b = 2320$ au același număr de cifre și $3 > 2$, deci $a > b$.
2. Numerele $a = 3750$ și $b = 3720$ au același număr de cifre, dar $3 = 3$ și $7 = 7$. Cum $5 > 2$, rezultă că $a > b$.

În multe situații practice, numerele naturale sunt comparate folosind *reprezentarea numerelor pe axă*. În alte cazuri, estimăm poziția punctului de reprezentare a unui număr natural pe axă, comparându-l cu numere deja reprezentate.

Considerăm axa numerelor, cu originea O și punctele $A(x)$ și $B(y)$ reprezentate pe axă.

Coordonata punctului A reprezintă distanța $x = OA$;

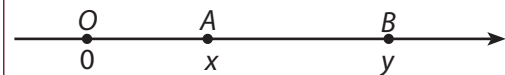
Coordonata punctului B reprezintă distanța $y = OB$;

Distanțele OA și OB sunt exprimate în unitatea de măsură aleasă pentru axă. Deducem ușor că:

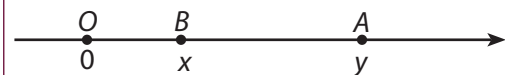
a) $x < y$ dacă și numai dacă $OA < OB$;

b) $x > y$ dacă și numai dacă $OA > OB$.

a)



b)



- Concluzie.**
- Punctul $A(x)$ este situat în stânga punctului $B(y)$ dacă și numai dacă $x < y$.
 - Punctul $A(x)$ este situat în dreapta punctului $B(y)$ dacă și numai dacă $x > y$.
 - Punctele $A(x)$ și $B(y)$ coincid dacă și numai dacă $x = y$.





Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă. Ina, Sergiu și Raluca au fost premiați la un concurs de matematică. Aceștia au obținut punctajele: Ina 26 de puncte, Sergiu 23 de puncte și Raluca 28 de puncte. Decideți premiul pe care l-a primit fiecare.

Soluție. Pentru a stabili ce premiu a luat fiecare, trebuie să ordonăm numerele care reprezintă punctajele. Ia premiul I cel cu punctajul cel mai mare. Dacă le ordonăm crescător, atunci primul a obținut premiul III, iar dacă le ordonăm descrescător, primul a obținut premiul I. Cum $23 < 26 < 28$, Raluca a luat premiul I, Ina a obținut premiul al II-lea, iar Sergiu a luat premiul al III-lea.



A ordona crescător două sau mai multe numere naturale înseamnă a stabili ordinea acestora, așa încât fiecare număr să fie mai mic decât cel de după el.

A ordona descrescător două sau mai multe numere naturale înseamnă a stabili ordinea acestora, așa încât fiecare număr să fie mai mare decât cel de după el.

Pentru compararea și pentru ordonarea numerelor naturale avem nevoie de una din relațiile „ \leq ” sau „ \geq ”.

Au loc proprietățile:

Proprietatea	$a \leq a$, oricare ar fi numărul natural a .	Dacă $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.	Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$.
Exemple	$0 \leq 0$; $1 \leq 1$; $2 \leq 2$; ...	$3 \leq x$ și $x \leq 3$, rezultă $x = 3$	$2 \leq 5$ și $5 \leq x$ rezultă $2 \leq x$.

Aplicație. Scrieți în ordine crescătoare numerele $x = \overline{9a76}$ și $y = \overline{987a}$, analizând toate cazurile posibile.

Soluție. $x = \overline{9a76}$ și $y = \overline{987a}$ au același număr de cifre, iar $9 = 9$. Dacă $a < 8$, atunci $\overline{9a76} < \overline{987a}$. Dacă $a = 8$, din $6 < a$, rezultă $\overline{9a76} < \overline{987a}$. Dacă $a = 9$, atunci $\overline{9a76} > \overline{987a}$. În concluzie, ordinea crescătoare a numerelor este x, y dacă $a \leq 8$ și y, x dacă $a = 9$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Comparați numerele naturale și scrieți pe caiete, completând în caseta liberă unul dintre simbolurile $<$, $=$ sau $>$, astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
 - $4\ 336 \square 84\ 329$;
 - $753\ 926 \square 753\ 927$;
 - $33\ 333 \square 3\ 399$;
 - $1\ 011 \square 1\ 100$;
 - $16\ 987 \square 16\ 897$;
 - $456 \times 10 \square 4\ 560$;
 - $900 \times 0 \square 500$;
 - $987 \square \overline{abcd}$
- Ordoneți crescător numerele naturale:
 - 36; 81; 54; 72; 58; 44; 29; 95; 67; 7; 15; 35; 21.
 - 1 245; 1 452; 1 524; 1 254; 2 541; 2 514; 4 512; 4 521; 5 421.
 - 18 018; 18 017; 17 018; 17 017; 17 918.
- Ordoneți descrescător numerele naturale:
 - 8; 4; 81; 44; 19; 84; 11; 21; 45; 89; 41; 102; 201; 91; 88.
 - 237; 207; 307; 702; 7 532; 7 703; 3 733; 3 337.
 - 830 038; 380 083; 80 088; 80 083; 883 800; 800 088; 83 830.
- Determinați toate numerele de forma $\overline{53x}$ astfel încât $53x > 537$.
- Scrieți:
 - toate numerele de forma \overline{aaa} , mai mari decât 560.
 - toate numerele de forma $\overline{b00}$ mai mici decât 390.
- Știind că $\overline{874a6} < \overline{8a540}$ determinați cifra impară a .
- Comparați numerele, analizând toate cazurile posibile:
 - $\overline{5a76}$ și $\overline{587a}$;
 - $\overline{54a74}$ și $\overline{547a4}$.

8. Se consideră cifrele: 1; 9; 7; 4; 3.

- a) Scrieți cel mai mic număr de cinci cifre, care se poate forma folosind cifre din grupul dat.
- b) Scrieți cel mai mare număr natural de cinci cifre care se poate forma folosind cifre din grupul dat.
- c) Scrieți cel mai mic număr de cinci cifre distincte, care se poate forma folosind cifre din grupul dat.
- d) Scrieți cel mai mare număr de cinci cifre distincte, care se poate forma folosind cifre din grupul dat.

9. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- a) Cel mai mare dintre numerele 99899, 98989, 99988 și \overline{abcdef} este:
A. 99899; B. 98989; C. 99988; D. \overline{abcdef} .
- b) Cel mai mic dintre numerele naturale n , $n - 3$, $n + 5$, $n + 1$ este:
A. n ; B. $n - 3$; C. $n + 5$; D. $n + 1$.

10. Determinați numerele naturale de forma \overline{abcd} care verifică simultan condițiile:

- a) cifra unităților este cea mai mare cifră pară;
- b) cifra miilor este cea mai mare cifră impară;
- c) $b + c = 15$.

11. Scrieți:

- a) numerele naturale mai mici decât 13;

17. În tabelul următor sunt redate înălțimile unor vârfuri muntoase de pe teritoriul României.

Vârful	Păpușa	Omu	Negoiu	Parângul Mare	Moldoveanu	Lespezi
Înălțimea (m)	2508	2514	2535	2519	2544	2517

a) Scrieți înălțimile în ordine descrescătoare.

b) Scrieți numele vârfurilor din tabel, în ordinea crescătoare a înălțimilor lor.



b) numerele naturale cuprinse între 41 și 53;

c) numerele naturale de forma $\overline{a5}$, în ordine crescătoare;

d) numerele naturale de forma $\overline{3b}$, în ordine descrescătoare.

12. a) Aflați numărul natural a , știind că între 39 și a sunt cuprinse 93 de numere naturale.



b) Aflați numărul natural b , știind că între b și 99 sunt cuprinse 23 de numere.

c) Gasiți cele mai mici numere naturale a și b astfel încât între a și b să fie cuprinse 222 de numere.

13. Scrieți, apoi citiți:

a) cel mai mare număr de trei cifre;

b) cel mai mare număr de trei cifre diferite;

c) cel mai mic număr de patru cifre;

d) cel mai mic număr de patru cifre diferite.

14. Fie numărul $B = 45\ 362\ 718$. Eliminați una dintre cifrele numărului B , astfel încât numărul obținut să fie cel mai mic posibil.

15. Fie numărul $A = 653\ 210$. Adăugați cifra 4 printre cifrele numărului A , astfel încât numărul obținut să fie cel mai mare posibil.

16. Determinați numerele naturale de forma \overline{ab} , știind că $4 < a \cdot b < 8$. Ordonăți crescător numerele găsite.



Minitest

Numerele naturale 20, n , 50 sunt scrise în ordine crescătoare.

(30 p) a) Scrieți toate valorile naturale pare pe care le poate lua n .

(30 p) b) Scrieți toate numerele n care au suma cifrelor 11.

(30 p) c) Scrieți valoarea numărului n , pentru care $M(n)$ este situat pe axa numerelor la distanță egală față de $A(20)$ și $B(50)$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Aproximări. Estimări



Ne amintim

A rotunji un număr natural la un anumit ordin, înseamnă a realiza aproximarea cea mai apropiată.

- Dacă cifra de ordin imediat inferior celui la care se face rotunjirea este mai mică decât 5, atunci cifra de ordinul la care se face rotunjirea rămâne neschimbată (se aproximează prin lipsă).
- Dacă cifra de ordin imediat inferior celui la care se face rotunjirea este mai mare sau egală cu 5, atunci cifra de ordinul la care se face rotunjirea crește cu o unitate (se aproximează prin adaos).

Exemplu. Considerăm numărul 279 345.

Rotunjirea	la zeci	la sute	la mii	la zeci de mii	la sute de mii
	279350	279300	279000	280000	300000
Justificare	cifra unităților este 5 și $5 \geq 5$	cifra zecilor este 4 și $4 < 5$	cifra sutelor este 3 și $3 < 5$	cifra miilor este 9 și $9 \geq 5$	cifra zecilor de mii este 7 și $7 \geq 5$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aproximarea prin lipsă la zeci, sute, mii, ... este *cel mai mare număr natural*, format numai din zeci respectiv sute, mii, ..., *mai mic sau egal* decât numărul dat.

Aproximarea prin adaos la zeci, sute, mii, ... este cel mai mic număr natural, format numai din zeci respectiv sute, mii, ..., *mai mare sau egal* decât numărul dat.

În consecință, orice număr natural este mai mare sau egal decât orice aproximare prin lipsă a acestuia și orice număr natural este mai mic sau egal decât orice aproximare prin adaos a acestuia.

Rotunjirea unui număr natural la zeci, sute, mii, ... este aproximarea acestui număr prin lipsă sau prin adaos, după cum urmează:

- Dacă diferența dintre numărul dat și cele două aproximări este aceeași, atunci se aproximează prin adaos.
- Dacă diferența dintre numărul dat și cele două aproximări este diferită, atunci se folosește aproximarea pentru care diferența este mai mică.

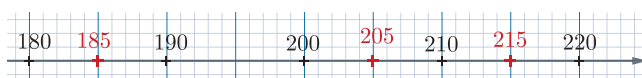
Numărul 7 839 se aproximează prin lipsă, astfel:

- la zeci: $7\ 839 \approx 7830$;
- la sute: $7\ 839 \approx 7800$;
- la mii: $7\ 839 \approx 7000$.

Numărul 7 839 se aproximează prin adaos, astfel:

- la zeci: $7\ 839 \approx 7840$;
- la sute: $7\ 839 \approx 7900$;
- la mii: $7\ 839 \approx 8000$.

a) Rotunjiți la zeci numerele: 185, 205, 215.



aproximare prin lipsă: $185 \approx 180$; $205 \approx 200$; $215 \approx 210$
 aproximare prin adaos: $185 \approx 190$; $205 \approx 210$; $215 \approx 220$
 rotunjire: $185 \approx 190$; $205 \approx 210$; $215 \approx 220$

b) Rotunjiți la zeci numerele: 184, 203, 216.



aproximare prin lipsă: $184 \approx 180$; $203 \approx 200$; $216 \approx 210$
 aproximare prin adaos: $184 \approx 190$; $203 \approx 210$; $216 \approx 220$
 rotunjire: $184 \approx 180$; $203 \approx 200$; $216 \approx 220$

Estimarea este o evaluare a unei cantități, cunoscând date incomplete sau insuficiente.

Dacă în cazul aproximărilor, eroarea este mai mică decât 10, 100, 1000, ..., în cazul estimărilor nu știm cât de aproape suntem de valoarea exactă.

Observație. Rezultatul obținut prin efectuarea unor calcule cu aproximări ale unor numere este o estimare a rezultatului exact.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Ne propunem să găsim aproximările numerelor 56 789; 10 501, apoi să le rotunjim la, zeci, sute, mii, zeci de mii.

Numărul	Aproximare la								Rotunjire la			
	zeci		sute		mii		zeci de mii		zeci	sute	mii	zeci de mii
	prin lipsă	prin adaus	prin lipsă	prin adaus	prin lipsă	prin adaus	prin lipsă	prin adaus				
56 789	56 780	56 790	56 700	56 800	56 000	57 000	50 000	60 000	56 790	56 800	57 000	60 000
10 501	10 500	10 510	10 500	10 600	10 000	11 000	10 000	20 000	10 500	10 500	11 000	10 000

Aplicația 2. Vlad și Mara au fost la cumpărături, împreună cu mama lor. Ei au cumpărat două penare, având prețul de 34 lei fiecare și patru cutii de markere cu prețul de 17 lei cutia.

Vlad spune: *Ne trebuie mai puțin de 160 de lei.*

Mara spune: *Ne trebuie mai mult de 100 de lei.*

Mama spune: *Cred că vom plăti cam 140 de lei.*

Casiera scanează prețurile produselor, listează bonul de casă și spune: *Aveți de plătit suma de 136 lei.*

Cum au gândit cei doi copii? Dar mama acestora?

Suma plătită, $S = 2 \cdot 34 + 4 \cdot 17 = 136$ (lei), nu coincide cu niciuna dintre sumele din dialogul celor trei.

Pentru a înțelege logica fiecărei afirmații, ne amintim de aproximări și de rotunjiri ale numerelor naturale.

Vlad a estimat suma, *aproximând* prețurile *prin adaus*, la zeci: $34 \approx 40$; $17 \approx 20$; Atunci, $S \approx 2 \cdot 40 + 4 \cdot 20 = 160$.

Mara a estimat suma, *aproximând* prețurile *prin lipsă*, la zeci: $34 \approx 30$; $17 \approx 10$; Atunci, $S \approx 2 \cdot 30 + 4 \cdot 10 = 100$.

Mama a estimat suma, *rotunjind* prețurile la zeci: $34 \approx 30$; $17 \approx 20$; $S \approx 2 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 140$.

Observație: Estimarea cea mai apropiată de rezultatul corect este cea obținută prin *rotunjirea termenilor*. Uneori însă, este util să folosim aproximări prin lipsă sau prin adaus pentru toți termenii. Estimările ne ajută să luăm decizii practice avantajoase.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Alegeți litera care indică răspunsul corect.

a) Aproximarea prin lipsă, la ordinul zecilor, a numărului 8 537 este:

- A. 8 500; B. 8 530;
C. 8 540; D. 8 600.

b) Aproximarea prin adaus, la ordinul sutelor, a numărului 68 007 este:

- A. 68 100; B. 68 000;
C. 69 000; D. 68 500.

c) Aproximarea prin lipsă, la ordinul miilor, a numărului 7657 este:

- A. 7 600; B. 7 700;
C. 7 000; D. 8 000.

d) Fără a efectua calcule, alegeți cea mai bună dintre estimările sumei de bani (în lei) de care avem nevoie pentru a cumpăra 19 euro la cursul 5 lei pentru un euro.

- A. 110 lei; B. 80 lei;
C. 100 lei; D. 200 lei.

2. Realizați pe caiete tabelul alăturat și completați căsuțele libere conform cerințelor, după model.

Numărul	Rotunjirea la ordinul		
	zecilor	sutelor	miilor
3 773	3 770	3 800	4 000
5 544			
45 721			



3. Scrieți aproximarea fiecărui număr, prin lipsă, la zeci: 1 007; 379; 46; 4 835; 18; 1 240 000; 10.
4. Scrieți aproximarea fiecărui număr, prin adaos, la zeci:
78; 253; 20 000; 45; 56 789; 10 401; 152; 3 806.
5. Scrieți aproximarea fiecărui număr, prin lipsă, apoi prin adaos, la mii:
72 500; 86 698; 9 999; 789; 49 000; 1 234 567.
6. Rotunjiți la sute, apoi la zeci de mii, pe fiecare dintre numerele:
8 837 320; 270 671; 53 987; 69 702; 2 288; 99 999; 128 976; 100 000 043.
7. Estimați suma necesară achiziționării a 19 truse de geometrie, știind că o trusă costă 49 de lei.



Minitest

- (20p) 1. Rotunjiți numărul 28 769 la ordinul sutelor.
2. Rareș, Ilinca și Simona au fost împreună la cumpărături. Rareș a cumpărat un penar de 69 de lei, Ilinca a cumpărat o trusă de 43 de lei, iar Simona a cumpărat cărți în valoare de 75 de lei.
- (15p) a) Aproximați prin adaos, la zeci, cele trei sume și calculați suma aproximărilor.
- (15p) b) Aproximați prin lipsă, la zeci, cele trei sume și calculați suma aproximărilor.
- (20p) c) Calculați suma totală cheltuită de cei trei copii, apoi aproximați prin adaos, la zeci, suma obținută.
- (20p) d) Comparați sumele obținute la subpunctele a) și b) cu rezultatul obținut la c).

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Scrieți:

- (5p) 1. numerele de trei cifre care au suma cifrelor 26;
- (5p) 2. numerele de patru cifre care au produsul cifrelor 125;
- (5p) 3. cel mai mic și cel mai mare număr de forma $a1b9$, format din cifre distincte;
- (5p) 4. aproximarea prin lipsă, la zeci, a numărului 1287.

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Cu cifrele 0, 1, 2, 3, scrise o singură dată fiecare, se pot forma:
A. 4 numere distincte; B. 12 numere distincte; C. 18 numere distincte; D. 6 numere distincte.
- (5p) 2. Al douăzecilea termen al șirului 1, 3, 5, 7, ... este:
A. 37; B. 39; C. 41; D. 43.
- (5p) 3. Scriem secvența „9876” de 54 de ori și formăm numărul 987698769876...9876. A 123-a cifră scrisă este:
A. 9; B. 8; C. 7; D. 6.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

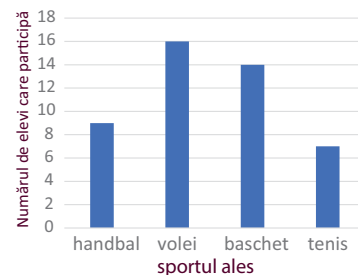
1. Se consideră numerele naturale care au trei cifre și îndeplinesc simultan condițiile:
 c_1) sunt numere pare; c_2) cifra unităților este jumătate din cifra sutelor.
- (10p) a) Scrieți trei astfel de numere.
- (10p) b) Determinați cel mai mic și cel mai mare număr cu proprietățile enunțate.
- (10p) 2. Fie numerele $A = \overline{76a67}$ și $B = \overline{766a7}$. Aflați cifra a , știind că $A \geq B$.
- (15p) 3. a) Pe axa numerelor cu unitatea de măsură 1 cm, reprezentați punctele $A(n)$, $B(n + 3)$, $C(n - 2)$, $D(n + 6)$, $n > 2$.
- (10p) b) Determinați numărul natural n știind că dacă reprezentăm pe axă punctul $E(5)$ acesta este situat între C și A .

Se acordă din oficiu 10 puncte.

2 OPERAȚII CU NUMERE NATURALE. PROPRIETĂȚI

În diagrama alăturată, sunt reprezentate opțiunile unui grup de 46 de elevi pentru sportul pe care doresc să îl practice.

- Determinați numărul elevilor care aleg tenis sau baschet.
- Aflați cu cât mai mulți elevi optează pentru volei, față de cei care optează pentru handbal.



Soluție. a) Aleg tenis 7 elevi și baschet 14 elevi, în total $7 + 14 = 21$ (elevi).

b) Optează pentru volei 16 elevi și pentru handbal 9 elevi, deci diferența este $16 - 9 = 7$ (elevi).

L1 Adunarea numerelor naturale. Proprietăți



Ne amintim

Pentru oricare două numere naturale a și b , se definește numărul natural unic $a + b$, numit *suma* acestora.

Operația de adunare asociază fiecărei perechi de numere naturale a și b numărul natural $a + b$.

Numerele a și b se numesc *termenii* adunării.

$$7 + 14 = 21$$

7 14 21
↙ ↘ ↓
termeni sumă



Rezolvăm și observăm

- Considerăm numerele naturale $a = 12$, $b = 29$, $c = 30$. Efectuați calculele necesare și completați într-un tabel sumele: a) $(a + b) + c$ și $a + (b + c)$; b) $a + b$ și $b + a$; c) $0 + a$ și $a + 0$.
- La fiecare subpunct al exercițiului 1, comparați rezultatele obținute pentru cele două sume.

Soluție. 1. Completăm calculele și rezultatele în tabelul:

a)		b)		c)	
$(a + b) + c$	$a + (b + c)$	$a + b$	$b + a$	$0 + a$	$a + 0$
$(12 + 29) + 30 = 41 + 30 = 71$	$12 + (29 + 30) = 12 + 59 = 71$	$12 + 29 = 41$	$29 + 12 = 41$	$0 + 12 = 12$	$12 + 0 = 12$

- Pentru numerele a , b , c date, au loc egalitățile: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $a + b = b + a$, $0 + a = a + 0 = a$.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Egalitățile descoperite în exercițiul de mai sus descriu *proprietăți* ale operației de adunare, adică proprietăți valabile pentru toate numerele naturale.

Proprietatea	Descrierea proprietății
Adunarea este <i>asociativă</i> .	$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a , b , c .
Adunarea este <i>comutativă</i> .	$a + b = b + a$, oricare ar fi numerele naturale a și b .
0 este <i>element neutru</i> pentru adunare.	$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul natural a .

În rezolvarea problemelor, unele enunțuri matematice (egalități sau inegalități) se *transformă* pentru a le reprezenta în forme diferite, astfel încât să se *păstreze valoarea de adevăr* a enunțului inițial. De exemplu egalitatea „ $n + 5 + 1 = 8$ ” se poate scrie „ $n + 6 = 8$ ” sau „ $n + 8 = 10$ ”.

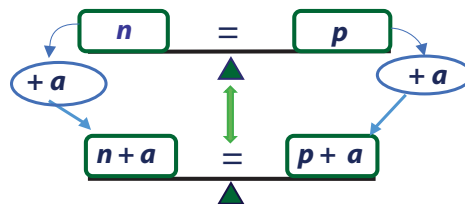
Pornind de la o egalitate sau de la o inegalitate, folosind operația de adunare a numerelor naturale, obținem:



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Dacă $n = p$, atunci $n + a = p + a$, oricare ar fi numărul natural a .
2. Dacă n și p sunt numere naturale cu $n \leq p$, atunci $n + a \leq p + a$, oricare ar fi numărul natural a .
3. Dacă n, p, a și b sunt numere naturale cu $n \leq p$ și $a \leq b$, atunci $n + a \leq p + b$.

Observație. Proprietățile 2, 3 au loc și pentru relațiile $<$, $>$, \geq .



Aplicație. Calculați suma $(a + b) + (x + y)$, știind că $a + x = 991$ și $b + y = 199$.

Soluție. $(a + b) + (x + y) = a + b + x + y = a + x + b + y = (a + x) + (b + y) = 991 + 199 = 1190$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - a) Rezultatul calculului $123 + 456 + 789$ este:
A. 1388; B. 1368; C. 1378; D. 1358.
 - b) Suma dintre cel mai mic număr de trei cifre diferite și cel mai mare număr de patru cifre este:
A. 10101; B. 10201; C. 10001; D. 10111.
 - c) Dacă $a + m = 79$ și $b + n = 638$, atunci $(a + b) + (m + n)$ este:
A. 707; B. 717; C. 697; D. 727.
 - d) Un creion costă 3 lei, un pix costă cu 6 lei mai mult decât un creion, iar un stilou costă cu 29 de lei mai mult decât un pix. Pentru un creion, un pix și un stilou vom plăti:
A. 51 lei; B. 49 lei; C. 38 lei; D. 50 lei.

2. Efectuați calculele și asociați fiecărei literă care identifică un calcul, în coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (a → 2).

	A	B
a.	$1 + 33 + 135 =$	1. 168
b.	$29 + 38 + 47 + 56 =$	2. 169
c.	$(0 + 85) + (87 + 0) =$	3. 170
d.	$26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 =$	4. 171
		5. 172

3. Aflați numărul:
 - a) cu 896 mai mare decât 15 375.
 - b) cu 202 mai mare decât suma numerelor 2 022 și 230 023.
 - c) cu 9 078 mai mare decât cel mai mare număr par de cinci cifre.

4. Efectuați calculele necesare, copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere rezultatele corespunzătoare.

a	864	4007
b	5114	9001
$a + 468$		
$a + 2022 + b$		

5.
 - a) Scrieți numărul 7 ca sumă a două numere naturale. Găsiți toate soluțiile posibile.
 - b) Scrieți numărul 60 ca sumă a cinci numere naturale, fiecare având două cifre.
 - c) Scrieți numărul 2 022 ca suma a 2 023 numere naturale.
6. Pentru o construcție s-au adus 1234 kg de nisip, 567 kg de pietriș, cu 890 kg mai mult ciment decât pietriș și 784 kg de pământ. Calculați cât cântăresc toate materialele de construcție, împreună.
7. Calculați, folosind proprietățile adunării:
 - a) $33 + 4054 + 67$;
 - b) $992 + 475 + 525 + 8$;
 - c) $101 + 203 + 2\ 022 + 797 + 899$;
 - d) $111 + 333 + 555 + 777 + 2224$.
8. Cristina scrie toate numerele de forma $\overline{ab7}$ care au suma cifrelor 21, iar Claudiu scrie toate numerele de forma $\overline{c3d5}$ care au suma cifrelor 22.
 - a) Precizați care dintre cei doi a scris mai multe numere.
 - b) Calculați suma dintre cel mai mare număr scris de Cristina și cel mai mic număr scris de Claudiu.
9. Suma a șapte numere naturale este 20. Arătați că cel puțin două dintre numere sunt egale.



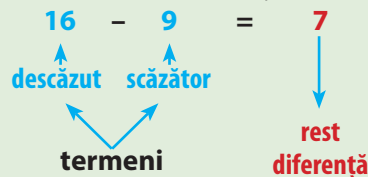


Ne amintim

Pentru oricare numere naturale a și b , $a \geq b$ se definește numărul natural unic $a - b$, numit *diferența* acestora. Operația de scădere asociază fiecărei perechi de numere a și b cu $a \geq b$, numărul natural $a - b$.

Numerele a și b sunt *termenii scăderii*.

Pentru că ordinea numerelor este esențială, cei doi termeni au nume diferite: a se numește *descăzut*, iar b se numește *scăzător*.



Observație. Scăderea numerelor naturale *nu are* proprietățile pe care le are adunarea numerelor naturale.

Problemă. Tata are 700 de lei, din care le dă celor doi copii ai săi 80 de lei respectiv 75 de lei.

Calculați, în două moduri, suma de bani cu care a rămas tatăl.

Soluție.

I. 1) Aflăm ce sumă le-a dat celor doi copii: $80 + 75 = 155$ (lei).

2) Aflăm suma rămasă: $700 - 155 = 545$ (lei).

II. 1) Aflăm ce sumă rămâne după ce îi dă primului copil banii: $700 - 80 = 620$ (lei).

2) Aflăm ce sumă rămâne după ce îi dă banii și celui de-al doilea copil: $620 - 75 = 545$ (lei).

Cele două moduri de rezolvare ilustrează proprietatea:

$$a - (b + c) = a - b - c, \text{ oricare ar fi numerele naturale } a, b, c, \text{ cu } a \geq b + c.$$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

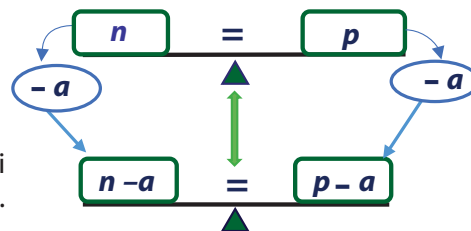
Pornind de la o egalitate sau de la o inegalitate, folosind operația de scădere a numerelor naturale, obținem:

1. Dacă n și p sunt numere naturale cu $n = p$ și $a \leq n$, atunci $n - a = p - a$.

Observație Proprietatea de mai sus are loc și dacă înlocuim simbolul „=” cu unul dintre simbolurile: \leq , $<$, $>$, \geq .

2. Dacă n și p sunt numere naturale cu $n \leq p$ și $p \leq a$, atunci $a - n \geq a - p$. (Dacă scăzătorul crește, atunci diferența se micșorează).

Exemplu: Din $102 \leq 200$ și $200 \leq 951$, rezultă $951 - 102 \geq 951 - 200$.



Aplicație. 1. Calculați numărul natural x , știind că $x + 72 = 98$.

2. Calculați $b + d$, știind că $a + b + c + d = 678$ și $a + c = 567$.

Soluție.

1. Din $x + 72 = 98$, folosind proprietatea de mai sus, pentru $a = 72$, obținem $x + 72 - 72 = 98 - 72$, adică $x = 26$.

2. Din $a + b + c + d = 678$, rezultă $a + c + b + d = 678$, adică $(a + c) + (b + d) = 678$, deci $b + d = 678 - (a + c) = 678 - 567 = 111$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Rezultatul calculului $975 - 531$ este:

A. 544; **B.** 444; **C.** 543; **D.** 434.

b) Diferența dintre cel mai mare număr de patru

cifre diferite și cel mai mic număr de trei cifre este:

A. 9866; **B.** 9899; **C.** 9776; **D.** 9989.

c) Dacă $a + b + c + d = 2022$ și $c + d = 202$, atunci numărul $a + b$ este egal cu:

A. 2020; **B.** 1920; **C.** 2224; **D.** 1820.

d) Pentru un creion, un pix și un stilou s-a plătit suma de 58 lei. Stiloul costă 37 lei, iar pixul cu 19 lei mai puțin decât stiloul. Prețul creionului a fost:

A. 3 lei; B. 1 leu; C. 2 lei; D. 4 lei.

2. Asociați fiecărei litere care identifică un calcul în coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (a → 1).

	A	B
a.	$235 - 199 - 13 =$	1. 23
b.	$1\ 360 - 793 - 542 =$	2. 25
c.	$7\ 027 - (10\ 226 - 3\ 223) =$	3. 24
d.	$9\ 999 - 8\ 888 - 777 - 66 - 241 =$	4. 27
		5. 26

3. Efectuați calculele necesare, copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere rezultatele corespunzătoare.

a	2 784	10 020
b	1 357	3 282
a - b		
14 302 - (a + b)		

4. Scrieți numărul:

- a) cu 975 mai mic decât 2468.
 b) cu 89098 mai mic decât diferența numerelor 320023 și 230032.
 c) cu 9988 mai mic decât cel mai mic număr natural format din cinci cifre diferite.

5. Se consideră operația de scădere $a - b = c$, cu a, b, c numere naturale, $a > b$.

- a) Știind că $a = 1204$ și $b = 976$, aflați c .
 b) Știind că $a = 1957$ și $c = 1795$, aflați b .
 c) Dacă $b = 468$ și $c = 8776$, aflați a .
 d) Dacă $a = b + 200$, aflați c .

6. O fabrică de ciment trimite la trei centre comerciale 7500 de saci cu ciment. La unul dintre centre se transportă 2 960 de saci cu ciment, iar la altul se transportă cu 490 de saci mai puțin. Aflați numărul sacilor de ciment transportați la al treilea centru comercial.

7. Suma a două numere este 7071, iar unul dintre ele este 3109.

- a) Aflați celălalt număr;
 b) Calculați diferența numerelor.

8. Comparați numerele fără a efectua scăderile, folosind proprietățile scăderii și eventuale estimări. Justificați, în fiecare caz, răspunsul dat:

- a) $a = 647 - 187$ și $b = 647 - 178$;
 b) $a = 3\ 006 - 306$ și $b = 6\ 003 - 306$;
 c) $a = 12\ 345 - 321$ și $b = 12\ 500 - 123$.

9. Sergiu primește de la mama sa 125 lei, de la tatăl său cu 35 de lei mai puțin, iar de la bunici cu 100 de lei mai puțin decât suma primită de la părinți. Aflați cu ce sumă de bani rămâne Sergiu după ce își cumpără o imprimantă care costă 288 lei.

10. Aflați numărul \overline{abcd} , știind că $\overline{abcd} - \overline{cd} = 4800$ și $\overline{cdab} - \overline{ab} = 8400$.



Minitest

(15 p) 1. Numărul cu 1 557 mai mare decât 3 779 este:

A. 5 336; B. 5 426; C. 5 936; D. 4 936.

(15 p) 2. Diferența dintre cel mai mare număr par, de trei cifre distincte și numărul 246, este:

A. 743; B. 740; C. 741; D. 742.

(20 p) 3. Dintre numerele $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 9$; $b = 2 + 4 + 6 + \dots + 18$; $c = 3 + 6 + 9 + \dots + 27$, este par numărul:

A. b ; B. c ; C. a ; D. niciunul.

(20 p) 4. Numărul 21 se poate scrie ca suma a n numere naturale diferite. Valoarea cea mai mare a numărului n este:

A. 5; B. 6; C. 7; D. 5 sau 6.

(20 p) 5. Scrieți fiecare dintre numerele 98, 396, 1595 ca sumă de unități, zeci, sute, mii, folosind modelele:

$$\overline{ab} = a\overline{0} + b, \overline{abc} = a\overline{00} + b\overline{0} + c.$$

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L3 Înmulțirea numerelor naturale



Ne amintim

Dacă n este număr natural, pentru suma $n + n$ (de două ori n) folosim notația $2 \times n$ sau $2 \cdot n$.

În general, suma $\underbrace{n+n+\dots+n}_{\text{de } m \text{ ori } n}$ se notează $m \cdot n$ (de m ori n).

Numărul $m \cdot n$ se numește produsul numerelor naturale m și n .

Observație. $0 \cdot a = 0$, oricare ar fi numărul natural a .

$$29 \cdot 19 = 551$$

↙ ↘
factori ↓
produs

Operația prin care, pentru oricare două numere naturale a și b (numite *factori*), se asociază numărul natural $a \cdot b$, numit *produsul* acestora, se numește *înmulțirea* numerelor naturale.



Rezolvăm și observăm

Înmulțirea numerelor naturale s-a definit pe baza operației de adunare. Este firesc să ne întrebăm dacă proprietățile adunării conduc la unele proprietăți asemănătoare pentru înmulțire.

Exercițiu rezolvat. Se consideră numerele naturale $a = 12$, $b = 2$, $c = 30$. Efectuați calculele necesare și completați într-un tabel:

1. a) $(a \cdot b) \cdot c$ și $a \cdot (b \cdot c)$; **b)** $a \cdot b$ și $b \cdot a$; **c)** $1 \cdot a$ și $a \cdot 1$.

2. La fiecare subpunct, comparați rezultatele obținute.

Soluție. 1. Completăm calculele și rezultatele în tabelul:

a)		b)		c)	
$(a \cdot b) \cdot c$	$a \cdot (b \cdot c)$	$a \cdot b$	$b \cdot a$	$1 \cdot a$	$a \cdot 1$
$(12 \cdot 2) \cdot 30 = 24 \cdot 30 = 720$	$12 \cdot (2 \cdot 30) = 12 \cdot 60 = 720$	$12 \cdot 2 = 24$	$2 \cdot 12 = 24$	$1 \cdot 12 = 12$	$12 \cdot 1 = 12$

2. Pentru numerele a, b, c date, au loc egalitățile: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $a \cdot b = b \cdot a$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$. Aceste egalități descriu proprietățile operației de înmulțire a numerelor naturale.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Proprietatea	Descrierea proprietății
Înmulțirea este <i>asociativă</i> .	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .
Înmulțirea este <i>comutativă</i> .	$a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi numerele naturale a, b .
1 este <i>element neutru</i> pentru înmulțire.	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, oricare ar fi numărul natural a .

Operația de adunare și operația de înmulțire a numerelor naturale sunt *legate* prin proprietatea numită *distributivitatea înmulțirii față de adunare*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .

Observație. Înmulțirea numerelor naturale este *distributivă și față de scădere*: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c , cu $b \geq c$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Factor comun al termenilor unei sume sau diferențe

Dacă citim și scriem de la dreapta la stânga proprietatea de distributivitate a înmulțirii numerelor naturale față de adunare și față de scădere, obținem:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c .

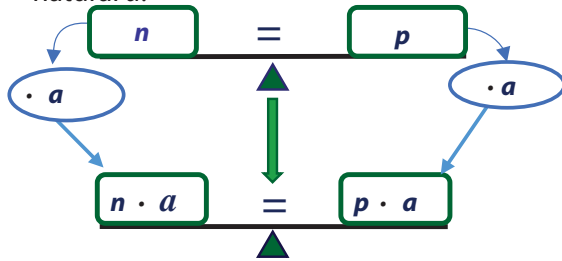
$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, oricare ar fi numerele naturale a, b, c cu $b \geq c$.

În ambele situații, numărul natural a este factor al fiecărui termen din membrul stâng al egalității, motiv pentru care se va numi *factor comun* al termenilor sumei respectiv al termenilor diferenței.

Observație. În rezolvarea problemelor, uneori este avantajos ca înainte de a efectua calculele într-o sumă cu mai mulți termeni sau o diferență, să dăm factor comun, adică să scriem suma sub forma $a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot (b - c)$.

Pornind de la o egalitate sau de la o inegalitate, folosind operația de înmulțire a numerelor naturale, obținem:

1. Dacă $n = p$, atunci $n \cdot a = p \cdot a$, oricare ar fi numărul natural a .



2. Dacă n și p sunt numere naturale cu $n \leq p$, atunci $n \cdot a \leq p \cdot a$, oricare ar fi numărul natural a .

3. Dacă n, p, a și b sunt numere naturale cu $n \leq p$ și $a \leq b$, atunci $n \cdot a \leq p \cdot b$.

Consultați manualul digital pentru a vizualiza proprietățile 2 și 3 în cazul relațiilor $<, \geq, >$.

Aplicație.

Calculați în două moduri:

a) $35 \cdot (27 + 98)$;

b) $(84 + 46 - 30) \cdot 15$

Soluție.

a) I. $35 \cdot (27 + 98) = 35 \cdot 27 + 35 \cdot 98 = 945 + 3430 = 4375$;

II. $35 \cdot (27 + 98) = 35 \cdot 125 = 4375$.

b) I. $(84 + 46 - 30) \cdot 15 = 84 \cdot 15 + 46 \cdot 15 - 30 \cdot 15 = 1260 + 690 - 450 = 1500$;

II. $(84 + 46 - 30) \cdot 15 = 100 \cdot 15 = 1500$.



Temă de portofoliu

Arătați că oricare ar fi cifrele a, b, c, d , în baza 10, au loc egalitățile:

a) $\overline{ab} - a - b = 9 \cdot a$;

b) $\overline{abc} - \overline{ab} - c = 9 \cdot \overline{ab}$;

c) $\overline{abcd} - \overline{abc} - d = 9 \cdot \overline{abc}$.

Indicație. $\overline{ab} - a - b = (a0 + b) - a - b = a \cdot 10 + b - a - b = (a \cdot 10 - a) + b - b = a \cdot (10 - 1) = 9 \cdot a$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Rezultatul calculului $35 \cdot 79$ este:

A. 2 775; B. 2 765; C. 2 675; D. 2 755.

b) Produsul dintre cel mai mare număr par de două cifre și cel mai mic număr impar de trei cifre este:

A. 8 998; B. 8 888; C. 9 898; D. 9 889.

c) Dacă $a = 7$, $2 \cdot b = 34$, $3 \cdot c = 51$, atunci calculând $6 \cdot a \cdot b \cdot c$ se obține:

A. 11 138; B. 12 108; C. 11 238; D. 12 238.

d) Dacă $a + b = 15$ și $x = 24$, atunci numărul $a \cdot x + x \cdot b$ este egal cu:

A. 300; B. 280; C. 320; D. 360.

e) Un creion costă 2 lei, un pix costă de trei ori mai mult decât un creion, iar un stilou costă de nouă ori mai mult decât un pix. Prețul stiloului este:

A. 63 lei; B. 72 lei; C. 54 lei; D. 45 lei.

2. Efectuați calculele necesare, copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere rezultatele corespunzătoare.

a	58	309
b	26	207
$a \cdot b$		
$48 \cdot a + 58 \cdot b$		

3. Efectuați calculele și asociați fiecărei *litere* care identifică un calcul, în coloana A, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (**a** → **5**).

A		B
a.	$25 \cdot 46 =$	1. 1020
b.	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) =$	2. 1024
c.	$56 \cdot (975 - 957) =$	3. 1008
d.	$16 \cdot 27 + 16 \cdot 37 =$	4. 1080
		5. 1150

4. Efectuați înmulțirile:
- a)** $39 \cdot 8$;
 - b)** $137 \cdot 26$;
 - c)** $39 \cdot 468$;
 - d)** $74 \cdot 10$;
 - e)** $163 \cdot 25$;
 - f)** $42 \cdot 345$;
 - g)** $763 \cdot 65$;
 - h)** $306 \cdot 100$;
 - i)** $26 \cdot 1357$;
 - j)** $2304 \cdot 0 \cdot 19$;
 - k)** $59 \cdot 1 \cdot 207$;
 - l)** $1005 \cdot 10 \cdot 13$.
5. Aflați numărul:
- a)** de 75 de ori mai mare decât 124.
 - b)** de 205 ori mai mare decât produsul numerelor 15 și 22.
 - c)** de 376 ori mai mare decât diferența dintre cel mai mare număr par de trei cifre și 443.
6. Calculați în două moduri:
- a)** $24 \cdot (36 + 89)$;
 - b)** $156 \cdot (84 - 74)$;

- c)** $20 \cdot (1438 - 1288)$;
- d)** $25 \cdot (97 + 43 - 40)$;
- e)** $248 \cdot (24 + 197 - 220)$;
- f)** $(167 + 33) \cdot 85$.



7. Folosind proprietățile înmulțirii numerelor naturale, calculați:
- a)** $70 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 17$;
 - b)** $1 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 20$;
 - c)** $10 \cdot (16 + 247)$;
 - d)** $234 \cdot 34 \cdot 0 \cdot 45$;
 - e)** $45 \cdot (307 - 207)$;
 - f)** $2 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 125$.
8. Calculați, folosind factorul comun.
- a)** $24 \cdot 36 + 24 \cdot 64$;
 - b)** $156 \cdot 84 - 156 \cdot 74$;
 - c)** $29 \cdot 1488 - 29 \cdot 1288$;
 - d)** $197 \cdot 25 + 43 \cdot 25 - 40 \cdot 25$;
 - e)** $248 \cdot 18 + 248 \cdot 87 - 248 \cdot 5$;
 - f)** $467 \cdot 85 + 33 \cdot 85$.
9. Scrieți:
- a)** toate perechile de numere naturale al căror produs este 18.
 - b)** toate tripletele de numere naturale al căror produs este 20.
10. Numărul a este de zece ori mai mare decât numărul $4 \cdot 6 \cdot 8$, iar numărul b este de unsprezece ori mai mare decât a . Calculați diferența $b - a$.
11. Alin a desenat, într-un dreptunghi, patru pătrate, iar în fiecare pătrat, a desenat câte cinci triunghiuri. Aflați:
- a)** numărul triunghiurilor desenate de Alin;
 - b)** numărul segmentelor desenate de acesta.
12. Suma a nouă numere, diferite două câte două este egală cu 36. Aflați produsul lor.
13. Se știe că $a \cdot b = 80$ și $a \cdot c = 55$. Calculați $a \cdot (b + c)$ și $a \cdot (b - c)$.



Minitest

1. Se consideră numerele naturale $x = 43 \cdot 34 - 43$; $y = 43 \cdot 23 - 43$ și $z = 54 \cdot 5 + 13 \cdot 54 + 54 \cdot 25$.
- (30 p) **a)** Scrieți ca produs de două numere naturale, folosind factorul comun, pe fiecare dintre numerele x, y, z .
 - (30 p) **b)** Calculați suma $x + y - z$, folosind rezultatele de la subpunctul **a)** și factorul comun.
2. Din cei 200 de lei pe care-i avea, Tania a cumpărat două kilograme de căpșune cu 29 lei kilogramul, cinci kilograme de mere cu 4 lei kilogramul și trei kilograme de banane cu 12 lei kilogramul. Aflați ce rest a primit Tania.



Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Împărțirea cu rest zero, a numerelor naturale

O companie de produse lactate a investit suma de 28 404 euro pentru materiale necesare modernizării liniei de producție. Toate produsele achiziționate vor fi achitate în rate lunare, fără dobândă, fiecare rată fiind de câte 789 euro. Aflați în câți ani achită compania întreaga sumă.

Soluție. Din $28\ 404 : 789 = 36$ (luni). Cum $1\text{ an} = 12$ luni, rezultă că 36 luni reprezintă $36 : 12 = 3$ (ani).



Ne amintim



Așa cum înmulțirea numerelor naturale este o *adunare repetată* a unui număr natural, *împărțirea* numărului natural m la numărul natural nenul n constă în efectuarea unui număr de *scăderi repetate* ale numărului n , primul descăzut fiind numărul m .

Dacă restul ultimei scăderi posibile este 0, spunem că m se împarte exact la n , sau că este o împărțire cu rest 0.

Vom scrie $m : n = p$, unde p este numărul scăderilor efectuate.

În descrierea de mai sus, numărul m se numește *deîmpărțit*, numărul n se numește *împărțitor*, iar numărul operațiilor de scădere posibile se numește *cât*.

$$28 : 7 = 4$$

↓ ↓ ↓
deîmpărțit împărțitor cât
↙ ↘
factori



Rezolvăm și observăm

Din clasa a IV-a, știm să efectuăm împărțiri ale numerelor naturale, atunci când împărțitorul are cel mult două cifre. Vom afla acum că *algoritmul* de împărțire este același și pentru cazul în care împărțitorul are mai multe cifre. Dificultatea constă în estimarea rezultatelor împărțirilor parțiale.



Dicționar

algoritm = succesiune de pași necesari pentru rezolvarea unei probleme

Aplicație.

Pentru exemplificare, să împărțim numărul 243 150 la numărul 150.

Deîmpărțit	Împărțitor
2 4 3 1 5 0	1 5 0
1 5 0	1 6 2 1
= 9 3 1	Cât
9 0 0	
= 3 1 5	
3 0 0	
= 1 5 0	
1 5 0	
= = =	

Pas 1. Estimăm rezultatul împărțirii $243 : 150$.

(150 se cuprinde în 243 o dată)

Pas 2. Efectuăm produsul $150 \cdot 1 = 150$ și scriem cifra 1 la rezultat.

Pas 3. Calculăm diferența $243 - 150 = 93$ și $93 < 150$.

Pas 4. Coborâm următoarea cifră, 1, și estimăm rezultatul împărțirii $931 : 150$. (150 se cuprinde în 931 de 6 ori)

Pas 5. Efectuăm produsul $150 \cdot 6 = 900$ și scriem cifra 6 la rezultat.

Pas 6. Calculăm diferența $931 - 900 = 31$ și $31 < 150$.

Pas 7. Coborâm cifra 5 și estimăm rezultatul împărțirii $315 : 150$. (150 se cuprinde în 315 de 2 ori)

Pas 8. Efectuăm produsul $150 \cdot 2 = 300$ și scriem cifra 2 la rezultat.

Pas 9. Calculăm diferența $315 - 300 = 15$ și $15 < 150$.

Pas 10. Coborâm cifra 0 și observăm că $150 : 150 = 1$

Pas 11. Scriem cifra 1 la rezultat și facem diferența $150 - 150 = 0$.

Am coborât toate cifrele deîmpărțitului și am obținut restul 0.

Proba: $243\ 150 = 150 \cdot 1621$.

Concluzie. $243\ 150 : 150 = 1\ 621$. Este vorba de o împărțire exactă (cu rest 0).

- În general, dacă numărul natural c este câtul împărțirii numărului natural a la numărul natural b , atunci $a = b \cdot c$.

Relația de mai sus este cunoscută din clasa a IV-a sub denumirea de *proba împărțirii exacte*. $D = \hat{I} \cdot C$, unde D este deîmpărțitul, \hat{I} este împărțitorul, iar C este câtul împărțirii.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Exercițiu: Se consideră numerele naturale $a = 30$, $b = 2$, $c = 12$.

1. Efectuați calculele necesare și completați într-un tabel:

a) $(a + c) : b$ și $a : b + c : b$; **b)** $(a - c) : b$ și $a : b - c : b$.

2. La fiecare subpunct, comparați rezultatele obținute.

Rezolvare. 1. Completăm calculele și rezultatele în tabelul:

$(a + c) : b$	$a : b + c : b$	$(a - c) : b$	$a : b - c : b$
$(30 + 12) : 2 = 42 : 2 = 21$	$30 : 2 + 12 : 2 = 15 + 6 = 21$	$(30 - 12) : 2 = 18 : 2 = 9$	$30 : 2 - 12 : 2 = 15 - 6 = 9$

2. Pentru numerele naturale a, b, c date, au loc egalitățile:

$$(a + c) : b = a : b + c : b \text{ și } (a - c) : b = a : b - c : b.$$

Relațiile de mai sus descriu proprietăți ale operației de împărțire cu rest 0, a numerelor naturale.

Proprietățile împărțirii exacte (cu rest 0) a numerelor naturale

- Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a : c$ și $b : c$ sunt împărțiri exacte, $c \neq 0$ și $a = b$, atunci $a : c = b : c$.
- Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a : c$ și $b : c$ sunt împărțiri exacte, $c \neq 0$, atunci $(a + b) : c = a : c + b : c$.
- Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a : c$ și $b : c$ sunt împărțiri exacte, $c \neq 0$ și $a \geq b$, atunci $(a - b) : c = a : c - b : c$.
- Dacă a, b, c, d sunt numere naturale astfel încât $a : c$ și $b : d$ sunt împărțiri exacte, c diferit de 0 și d diferit de 0, atunci $(a \cdot b) : (c \cdot d) = (a : c) \cdot (b : d)$.

Observații. 1. Împărțirea la 0 nu are sens!

2. Oricare ar fi numărul natural nenul a , are loc egalitatea $0 : a = 0$.

3. Dacă numărul natural nenul a se împarte exact la numărul natural nenul b , atunci egalitatea $a : b = c$ este echivalentă cu $a = b \cdot c$ și cu $a : c = b$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație

Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1 : Cel mai mic număr natural de trei cifre care se împarte exact la 5 este 105.

p_2 : Cel mai mare număr natural de 4 cifre care se împarte exact la 13 este 9 997.

p_3 : Numărul \overline{aaa} se împarte exact la 111, oricare ar fi cifra nenulă a .

p_4 : Cu 57 băieți și 24 fete se pot face echipe de câte trei elevi, fiecare elev fiind într-o singură echipă.

Soluție.

p_1 : Din $100 : 5 = 20$ și $100 < 105$, rezultă că propoziția p_1 este falsă;

p_2 : Din $9\ 997 : 13 = 769$ și $770 \cdot 13 = 10\ 010$, care are 5 cifre, rezultă că p_2 este adevărată;

p_3 : Din $\overline{aaa} = 100 \cdot a + 10 \cdot a + a = 111 \cdot a$, rezultă că $\overline{aaa} : 111 = (111 \cdot a) : 111 = a$, oricare ar fi cifra nenulă a , iar p_3 este adevărată;

p_4 : În total, sunt 81 de elevi, iar $81 = 3 \cdot 27$, deci se pot forma 27 de echipe și propoziția p_4 este adevărată.



- Efectuați împărțirile:

a) $238 : 7$;	f) $800 : 80$;
b) $5\ 072 : 8$;	g) $4\ 000 : 200$;
c) $184 : 23$;	h) $2\ 401 : 343$;
d) $169 : 13$;	i) $5\ 535 : 123$;
e) $390 : 15$;	j) $3683 : 29$.
- Aflați numărul:
 - de 35 de ori mai mic decât 945.
 - de 74 de ori mai mic decât dublul numărului 999.
- Într-un ansamblu rezidențial sunt 32 de case de același fel, iar suma pe care dezvoltatorul a încasat-o după vânzarea tuturor caselor este 3 680 000 euro. Calculați prețul cu care s-a vândut o casă.
- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Rezultatul calculului $126 : 3$ este:
A. 32; B. 41; C. 42; D. 44.
 - Câtul împărțirii celui mai mic număr par de trei cifre distincte la numărul 6 este:
A. 18; B. 17; C. 16; D. 19.
 - Dacă $a = 25$, $b = 100$ și $(a + b) \cdot x = 1000$, atunci x este:
A. 8; B. 12; C. 9; D. 7.
 - Șapte stilouri costă 238 lei. Numărul de stilouri, de același fel, pe care le putem cumpăra cu 884 lei, este:
A. 27; B. 28; C. 29; D. 26.
- Efectuați calculele necesare, copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere rezultatele corespunzătoare.

a	476	1656	2268
b	28	72	108
a : b			
(a + b) : 18			

- Corina a fost născută când mama ei avea 22 ani. Dacă împărțim vârsta actuală a mamei la vârsta actuală a Corinei, obținem câtul 3. Câți ani are Corina în prezent? Peste câți ani vârsta mamei va fi dublul vârstei Corinei?

- Efectuați calculele și asociați fiecărei *litere* care identifică un calcul, în coloana A, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (a → 5).

A	B
a. $3\ 264 : 17 =$	1. 0
b. $17\ 100 : 9 : 10 =$	2. 180
c. $3\ 820 : (125 : 5 - 5) =$	3. 191
d. $3\ 240 : 6 - 3240 : 12 - 3\ 240 : 36 =$	4. 190
	5. 192

- Determinați:
 - toate numerele la care 91 se împarte exact.
 - cel mai mic număr și cel mai mare număr de trei cifre care se împart exact la 47.
- La un club sportiv sunt aduse 80 de cutii cu mingi de tenis. Fiecare cutie conține 24 tuburi și în fiecare tub sunt 6 mingi de tenis. Mingile de tenis se împart în mod egal unui număr de 36 sportivi care se pregătesc pentru un viitor turneu. Aflați numărul de mingi primite de fiecare sportiv.
- Verificați egalitatea $a : n + b : n = (a + b) : n$, unde a, b, n sunt numerele naturale cu $n \neq 0$, pentru:
 - $a = 56, b = 84, n = 7$;
 - $a = 144, b = 240, n = 16$.
- Efectuați calculele:
 - $336 : 21 + 441 : 21$;
 - $4\ 800 : 32 - 960 : (38 - 6)$.
- Arătați că au loc egalitățile:
 - $(\overline{ab} + \overline{ba}) : 11 = \overline{aa} : 11 + \overline{bb} : 11$;
 - $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : 111 = a + b + c$.
- Efectuați împărțirile:

a) $1188 : 11$	c) $4553 : 29$
b) $4526 : 31$	d) $8384 : 64$
- Determinați câtul împărțirilor:

a) $211\ 356 : 412$	c) $106080 : 136$
b) $36624 : 109$	d) $126\ 336 : 188$
- Aflați cel mai mare număr de 3 cifre care se împarte exact la cel mai mare număr de 2 cifre.

L5 Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Bunicul a cumpărat fructe pentru cei doi nepoți ai săi și vrea să le împartă în mod egal. El constată că are 6 banane și 9 portocale. Câte fructe de fiecare fel primește fiecare copil?

Soluție. $6 : 2 = 3$, deci fiecare primește 3 banane. 9 nu se împarte exact la 2. Cum $9 = 2 \cdot 4 + 1$, fiecare copil primește 4 portocale, dar mai rămâne și bunicul cu o portocală.



Am stabilit că dacă numărul natural a se împarte exact la numărul natural nenul b , atunci scriem $a : b = c$ sau $a = b \cdot c$. Ne propunem să evidențiem relația obținută în cazul în care a nu se împarte exact la b .

Aplicația 1. Împărțim numărul 231 la numărul 5.

Deîmpărțit	Împărțitor	Cât
2 3 1	5	
<u>2 0</u>	46	$5 \cdot 4 = 20$
= 3 1		
<u>3 0</u>		$5 \cdot 6 = 30$
= 1		$1 < 5$

$$231 = 5 \cdot 46 + 1$$

Deîmpărțit	Împărțitor	Cât	Rest
------------	------------	-----	------

Efectuăm împărțirea, urmând pașii enumerați în lecția anterioară.

Constatăm că restul ultimei scăderi este *diferit de zero* (nenul). Acesta se va numi *restul împărțirii*.

Din clasa a IV-a, știm că $D = \hat{I} \cdot C + R$, $R < \hat{I}$, relație pe care o folosim pentru a face *proba împărțirii*.

Vom scrie cele de mai sus sub forma unui rezultat matematic remarcabil, numit *Teorema împărțirii cu rest*.

Oricare ar fi numărul *natural* a și oricare ar fi numărul *natural nenul* b , există numerele naturale q și r , unic determinate, astfel încât $r < b$ și $a = b \cdot q + r$.

În enunțul teoremei, a este *deîmpărțitul*, numărul b este *împărțitorul*, q este *câțul*, iar r este *restul împărțirii*.

Observație. Resturile care se pot obține prin împărțire la numărul natural nenul n sunt: 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$.

Un număr natural este par dacă și numai dacă restul împărțirii acestuia la 2 este 0;

Un număr natural este impar dacă și numai dacă restul împărțirii acestuia la 2 este 1.

Aplicația 2.

Suma a trei numere este 301. Împărțind două dintre numere la al treilea, obținem câturile 9, respectiv 16 și resturile 7, respectiv 8. Aflați cele trei numere.

Soluție. Fie a, b, c cele trei numere.

Știm că $a + b + c = 301$. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $a = c \cdot 9 + 7$ și $b = c \cdot 16 + 8$. De aici $c \cdot 9 + 7 + c \cdot 16 + 8 + c = 301$, deci $9 \cdot c + 16 \cdot c + c = 286$.

Dăm c factor comun și obținem $(9 + 16 + 1) \cdot c = 286$, deci $26 \cdot c = 286$ și $c = 286 : 26 = 11$. Numerele sunt: $a = 9 \cdot 11 + 7 = 106$, $b = 16 \cdot 11 + 8 = 184$, $c = 11$.



- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Dacă împărțim un număr natural la 3 se pot obține resturile:
A. 1 și 3; **B.** 0 și 1; **C.** 1, 2 și 3; **D.** 0, 1 și 2.
 - Numărul natural care împărțit la 29 dă câtul 17 și restul 5 este:
A. 499; **B.** 498; **C.** 501; **D.** 500.
 - La o împărțire, deîmpărțitul este de cinci ori mai mare decât împărțitorul. Restul împărțirii este:
A. 3; **B.** 2; **C.** 0; **D.** 1.
 - Autobuzul școlii are 18 locuri pentru pasageri. Numărul minim de transporturi necesare pentru a duce 62 elevi la școală este:
A. 4; **B.** 3; **C.** 2; **D.** 5.



- Efectuați calculele și asociați fiecărei *literă* care identifică un calcul, în coloana *A*, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana *B*. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (**a** → **5**).

A	B
a. Restul împărțirii numărului 1701 la 9 este	1. 24
b. Împărțind numărul 677 la 30 se obține câtul	2. 25
c. Suma resturilor distincte obținute la împărțirea numerelor impare la 10 este	3. 22
d. Cel mai mare număr care împărțit la 5 dă câtul 4 este	4. 23
	5. 0

- Efectuați împărțirile și completați tabelul:

Deîmpărțitul	98	101	177	478	702
Împărțitorul	10	15	23	25	27
Câtul					
Restul					

- Folosind teorema împărțirii cu rest, completați tabelul:

Deîmpărțitul	389	423		819	
Împărțitorul	30		19		1
Câtul		30	19	18	2022
Restul		3	9	27	

- Efectuați următoarele împărțiri și verificați egalitatea $d = \hat{i} \cdot c + r$, cu $r < \hat{i}$, unde d, \hat{i}, c și r reprezintă deîmpărțitul, împărțitorul, câtul, respectiv restul împărțirilor.

a) 79 : 4;	e) 1084 : 42;
b) 435 : 9;	f) 2121 : 303;
c) 924 : 11;	g) 8619 : 73;
d) 952 : 349;	h) 54321 : 76.
- Aflați:
 - numărul care împărțit la 29, dă câtul 19 și restul 9;
 - numărul care împărțit la 36, dă câtul 54 și restul de șase ori mai mic decât câtul;
 - numerele care împărțite la 5, dau câtul 43 și restul impar.
- Aflați toate numerele care împărțite la 5 dau câtul 55.
- Aflați toate numerele de forma \overline{ab} , care împărțite la a dau restul 7.
- Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul egal cu restul.
- Anca, Dora și Flavia pregătesc 54 de suporturi pe care vor expune planșele la o expoziție. Dacă fiecare pregătește 8 suporturi în 4 minute, aflați de cât timp au nevoie cele trei fete, lucrând împreună, pentru a termina toate suporturile.
- Determinați restul împărțirii numărului $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 99 + 100$ la 83.
- Suma a două numere este 104. Determinați numerele, știind că împărțind unul dintre ele la celălalt, obținem câtul 5 și restul 8.
- Alegem la întâmplare șapte numere și le împărțim pe fiecare la 6. Arătați că vom obține cel puțin două resturi egale.





Minitest

Alegeți varianta corectă de răspuns.

- (30p) 1. Dacă $a = 75$, $b = 425$ și $(a + b) \cdot x = 1000$, atunci x este:
A. 5; B. 10; C. 2; D. 20.
- (20p) 2. Șapte stilouri costă 189 de lei. Numărul de stilouri, de același fel, pe care le putem cumpăra cu 621 de lei, este:
A. 27; B. 23; C. 32; D. 25.
- (20p) 3. Dacă a și b sunt numere naturale cu proprietatea $a = 5 \cdot b$, atunci restul împărțirii numărului a la numărul b , este:
A. 3; B. 2; C. 1; D. 0.
- (20p) 4. Autobuzul școlii are 20 de locuri pentru pasageri. Numărul minim de transporturi necesar pentru a transporta 74 de elevi la școală este:
A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

- (5p) 1. Numărul cu 406 mai mare decât dublul lui 604 este
- (5p) 2. Scăzând din cel mai mare număr par, format din patru cifre distincte, numărul 10·20·30, obținem numărul
- (5p) 3. Cel mai mic număr \overline{abcd} , având produsul cifrelor 490, este
- (5p) 4. Numărul care, împărțit la 25, dă câtul 26 și restul 24 este

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Rezultatul calculului: $6216 : 12 - 13 \cdot 39$ este:
A. 13; B. 12; C. 11; D. 15.
- (5p) 2. Suma tuturor numerelor, care împărțite la 4 dau câtul 6, este:
A. 102; B. 104; C. 103; D. 108.
- (5p) 3. Cel mai mare număr natural n , pentru care $12 \cdot n + 7 < 115$, este:
A. 9; B. 8; C. 10; D. 7.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (20p) 1. Se consideră numerele $a = 31 \cdot [4 + 4 \cdot (3 + 333 : 37)]$ și $b = 9 \cdot (5290 : 23 - 972 : 18)$.
Arătați că $a : 13 < b : 12$.
- (20p) 2. Suma a patru numere naturale este 80. Aflați numerele, știind că suma primelor trei este 60, suma ultimelor trei este 52, iar al doilea număr este egal cu al treilea.
- (15p) 3. Numerele naturale m, n, p au proprietățile $m \cdot n = 32$ și $m \cdot p = 23$.
Calculați $m \cdot (n + p)$, $m \cdot (n - p)$ și $[m \cdot (n + p) + 1] : [m \cdot (n - p) - 1]$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

3

PUTERI CU EXPONENT NATURAL ALE UNUI NUMĂR NATURAL

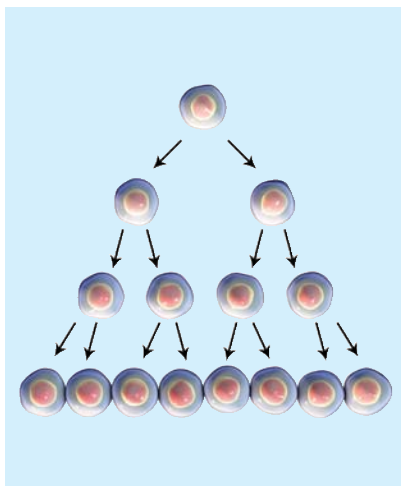
L1 Puterea cu exponent natural a unui număr natural



Rezolvăm și observăm

O celulă, plasată într-un mediu de cultură se va *diviza* în două celule după 20 de minute. După alte 20 de minute fiecare din cele două celule obținute se va diviza în câte două celule. Acest mediu de cultură este menținut timp de 24 de ore.

- Determinați numărul de celule obținute după o oră.
- Determinați numărul total al celulelor obținute la finalizarea procedurii.



Soluție. La fiecare 20 de minute, se dublează numărul de celule existente.

a) Într-o oră, sunt 3 intervale de timp de câte 20 de minute. După primele 20 de minute se formează 2 celule.

După 40 de minute, sunt $2 \cdot 2$ celule.

După 60 de minute (o oră), vor fi

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (celule).

b) În 24 de ore sunt $3 \cdot 24 = 72$ intervale de timp de câte 20 de minute. Numărul total de celule este

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de } 72 \text{ de ori } 2}$$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru numerele naturale oarecare a și n cu $n \geq 2$, produsul $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a}$ se notează a^n și se numește *puterea a n-a a numărului natural a*.

În descrierea de mai sus, numărul a se numește *baza* puterii, iar numărul n se numește *exponentul* puterii.

Exemple. 1. Puterea a doua a numărului 2 este $2 \cdot 2 = 2^2$.

2. Puterea a treia a numărului 2 este $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

3. Puterea a 72-a a numărului 2 este $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de } 72 \text{ de ori } 2} = 2^{72}$.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = a^n \begin{matrix} \longrightarrow & \text{exponent} \\ \longrightarrow & \text{bază} \end{matrix}$$

Detaliem informațiile de mai sus, în tabelul următor.

produsul	$a \cdot a$	$a \cdot a \cdot a$	$a \cdot a \cdot a \cdot a$...	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ de ori } a}$
notația	a^2	a^3	a^4	...	a^n
citire	a la puterea a doua	a la puterea a treia	a la puterea a patra	...	a la puterea n
interpretare	puterea a doua a numărului a .	puterea a treia a numărului a .	puterea a patra a numărului a	puterea a n -a numărului a .
baza	a	a	a	...	a
exponentul	2	3	4	...	n

Am definit doar puteri cu exponent mai mare sau egal cu 2. Pentru $n = 1$ și pentru $n = 0$, au loc convențiile următoare.

- $a^1 = a$, oricare ar fi numărul natural a .
- $a^0 = 1$, oricare ar fi numărul natural *nenul* a .

Atenție! 0^0 nu are sens!

Observații.

1. Puterea a doua a numărului natural a , se numește *pătratul* numărului a .
2. Puterea a treia a numărului natural a , se numește *cubul* numărului a .

$$1. 0^2 = 0; 1^2 = 1; 2^2 = 4; 3^2 = 9; 4^2 = 16; \dots; 9^2 = 81; 10^2 = 100, \dots$$

$$2. 0^3 = 0; 1^3 = 1; 2^3 = 8; 3^3 = 27; 4^3 = 64; \dots; 9^3 = 729; 10^3 = 1000, \dots$$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație.

- a) Scrieți numărul 93 ca sumă de puteri cu exponenți diferiți, ale numărului 3.
- b) Știind că $2^{10} = 1024$, calculați, folosind proprietățile înmulțirii, numărul 2^{11} .
- c) Justificați afirmația:

Oricare ar fi numărul natural nenul a și oricare ar fi numărul natural n , are loc egalitatea $a^{n+1} = a^n \cdot a^1$.

Soluție. a) $3^1 = 3; 3^2 = 9; 3^3 = 27; 3^4 = 81$, deci $93 = 3 + 9 + 81 = 3^1 + 3^2 + 3^4$.

$$b) 2^{11} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de 11 ori } 2} = 2 \cdot \left(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de 10 ori } 2} \right) = 2 \cdot 2^{10}.$$

Cum $2^{10} = 1024$, rezultă $2^{11} = 2 \cdot 1024 = 2048$.

c) Considerăm numărul natural nenul a și numărul natural n . Inspirați de subpunctul b), folosind asociativitatea înmulțirii, obținem:

$$a^{n+1} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n+1 \text{ ori } a} = \left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori } a} \right) \cdot a = a^n \cdot a.$$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - a) Scris ca putere, numărul $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ este:
A. 3^4 ; B. 3^5 ;
C. 3^3 ; D. 3^6 .
 - b) Numărul 32, scris ca putere cu exponentul cel puțin egal cu 2, este:
A. 4^8 ; B. 16^2 ;
C. 2^5 ; D. 8^4 .
 - c) Între numerele 4^2 și 5^2 sunt cuprinse:
A. 8 numere naturale;
B. 9 numere naturale;
C. 10 numere naturale;
D. 7 numere naturale.
2. Cifra unităților numărului $n = 10^4 + 4^3$ este:
A. 2; B. 8;
C. 6; D. 4.
3. Efectuați calculele necesare, copiați pe caiete și completați rezultatele corecte.

a) $7^2 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>	e) $30^2 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>
b) $3^3 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>	f) $11^3 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>
c) $2^7 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>	g) $(2 + 4)^2 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>
d) $5^4 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>	h) $(15 - 6)^3 =$ <input style="width: 50px; height: 20px;" type="text"/>
4. Completați în casetă litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Numărul 22 este o putere a numărului 2.	
p_2 : În scrierea 23^{24} , baza puterii este 23.	
p_3 : 729 este puterea a cincea a numărului 3.	
p_4 : $20^2 + 30^2 = (20 + 30)^2$.	

5. Efectuați calculele și asociați fiecărei *litere* care identifică un calcul, în coloana A, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (a → 2).

	A	B
a.	$0^8 + 8^0 =$	1. 0
b.	$10^2 - 8^2 - 6^2 =$	2. 1
c.	$1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 =$	3. 12
d.	$10^3 - 31^2 - 3^3 =$	4. 8
		5. 4

6. Scrieți ca puteri numerele:
- $2 \cdot 2 \cdot 2$;
 - $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;
 - $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$;
 - $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (1 + 2) \cdot (2 + 1)$;
 - $\overline{ab} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ab}$;
 - $\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_{19 \text{ factori}}$.

7. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere numerele corespunzătoare, după model.

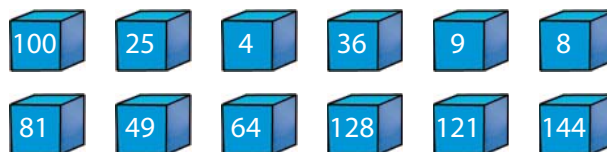
Puterea	5^6	8^0	$(2 + 4)^{3+4}$	7		
Baza puterii	5				25	7
Exponentul puterii	6				4	29

8. Calculați:
- $2^2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^{10}$;
 - $3^0, 3^1, 3^2, 3^4, 3^6$;
 - $5^0, 5^2, 5^3, 5^4$;
 - $25^2, 30^2, 100^3, 1000^2$.

9. Scrieți numerele 81, 900, 10000, 250000 ca puteri cu exponent cel puțin egal cu 2.
10. Calculați:
- $2^6 - 2$;
 - $5^0 + 25^2$;
 - $1^0 + 2^1 + 3^2 + 4^3$;
 - $2^2 + 22^2 + 222^2$;
 - $22^0 + 0^{2022} + 1^{200}$;
 - $(7 - 4)^0 + (7 - 4)^1$.

11. Scrieți numărul 15 ca sumă de puteri ale numărului 2.
12. Arătați că au loc egalitățile:
- $3^2 + 4^2 = 5^2$;
 - $15^2 - 12^2 = 9^2$;
 - $6^2 + 8^2 = 10^2$;
 - $20^2 - 16^2 = 12^2$.

13. Observați numerele scrise pe cubulețe.



Selectați numerele care îndeplinesc condiția:

- pot fi scrise sub forma 2^n ;
- pot fi scrise sub forma a^2 .

Stabiliți dacă există, printre numerele date, unele care îndeplinesc ambele condiții.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
- (10 p) a) Scris ca putere, numărul $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ este:
A. 8^8 ; **B.** 8^4 ; **C.** 8^6 ; **D.** 8^5 .
- (10 p) b) Diferența $5^3 - 10^2$ este:
A. 15; **B.** 25; **C.** 5; **D.** 10.
- (10 p) c) Dacă $4^n = 64$, atunci n este:
A. 3; **B.** 4; **C.** 16; **D.** 2.
- (20 p) 2. Aflați, prin calcul, numărul cu 2^3 mai mare decât 3^4 .
- (20 p) 3. a) Știind că $10^x = 10 \cdot 10 \cdot (9 + 1) \cdot (8 + 2) \cdot 10$, determinați numărul x .
- (20 p) b) Calculați suma $a^3 + b^2 + (a + b)^0$, știind că $\overline{ab} = 34$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Reguli de calcul cu puteri

În lecția anterioară, am învățat că numărul a^n este un produs de n factori egali. Calculele cu puteri de numere naturale ne conduc, de multe ori, la calcule cu numere mari, efectuarea acestora cerând timp și răbdare. Proprietățile operațiilor studiate ne oferă posibilitatea de a identifica reguli cu ajutorul cărora putem efectua anumite calcule cu puteri.



Rezolvăm și observăm

Exercițiu. Scrieți fiecare putere ca produs de factori egali, folosiți proprietățile operațiilor și comparați rezultatele obținute pentru:

a) $3^3 \cdot 3^4$ și 3^{3+4} ; **b)** $7^4 : 7^2$ și 7^{4-2} ; **c)** $(5^3)^2$ și $5^{3 \cdot 2}$; **d)** $(2 \cdot 3)^3$; $2^3 \cdot 3^3$; **e)** $(9 : 3)^2$; $9^2 : 3^2$.

Soluție.

Calcul	Concluzie
a) $3^3 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$; $3^{3+4} = 3^7$.	a) $3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4}$
b) $7^4 : 7^2 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^2$.	b) $7^4 : 7^2 = 7^{4-2}$
c) $(5^3)^2 = 5^3 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$.	c) $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2}$
d) $(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^3$.	d) $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$
e) $(9 : 3)^2 = (9 : 3) \cdot (9 : 3) = 3 \cdot 3 = 3^2$; $9^2 : 3^2 = (9 \cdot 9) : (3 \cdot 3) = 81 : 9 = 9 = 3^2$.	e) $(9 : 3)^2 = 9^2 : 3^2$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Egalitățile descoperite la exercițiul anterior descriu proprietăți, reguli care ne permit să efectuăm operații cu puteri.

Denumirea regulii	Regula și condițiile de aplicare
produsul a două puteri care au aceeași bază	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, oricare ar fi a număr natural nenul și oricare ar fi m, n numere naturale.
câtul a două puteri care au aceeași bază	$a^m : a^n = a^{m-n}$, oricare ar fi a număr natural nenul și oricare ar fi m, n numere naturale cu $m \geq n$.
puterea unei puteri	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, oricare ar fi a număr natural nenul și oricare ar fi m, n numere naturale.
puterea unui produs	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, oricare ar fi a și b numere naturale nenule și oricare ar fi m număr natural.
puterea unui cât	$(a : b)^m = a^m : b^m$, oricare ar fi a și b numere naturale nenule și oricare ar fi m număr natural.

Ne reamintim că 0^0 nu are sens.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație. a) Scrieți numărul $3^{10} : (3^2 \cdot 3^2)^2$ ca o singură putere cu baza 3.

b) Efectuați calculele $(2^{12} \cdot 5^{10}) : (2^{10} \cdot 5^8)$ și scrieți rezultatul ca putere cu exponentul mai mare ca 1.

c) Considerăm numerele naturale

$$x = 2^{11} \cdot 8^{10} \text{ și } y = 3^{43} : 3^{29}.$$

Determinați numerele naturale a și b , știind că $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = 2^3 \cdot 3^2$.

Soluție. a) $3^{10} : (3^2 \cdot 3^2)^2 = 3^{10} : (3^{2+2})^2 = 3^{10} : (3^4)^2 = 3^{10} : 3^{4 \cdot 2} = 3^{10} : 3^8 = 3^2$.

b) $(2^{12} \cdot 5^{10}) : (2^{10} \cdot 5^8) = (2^{12} : 2^{10}) \cdot (5^{10} : 5^8) = 2^{12-10} \cdot 5^{10-8} = 2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2$.

c) $x = 2^{11} \cdot 8^{10} = 2^{11} \cdot (2^3)^{10} = 2^{11} \cdot 2^{3 \cdot 10} = 2^{11} \cdot 2^{30} = 2^{11+30} = 2^{41}$;
 $y = 3^{43} : 3^{29} = 3^{43-29} = 3^{14}$;

Atunci, $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = (2^{41} \cdot 3^{14}) : (2^a \cdot 3^b)$.

Pentru $a \leq 41$ și $b \leq 14$, Egalitatea din enunț devine:

$$2^{41-a} \cdot 3^{14-b} = 2^3 \cdot 3^2.$$

Deducem că $41 - a = 3$ și $14 - b = 2$, adică $a = 38$ și $b = 12$.



- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Scris ca putere cu baza 2, numărul $2^8 \cdot 2^2$ este:
A. 2^6 ; B. 2^4 ; C. 2^{16} ; D. 2^{10} .
 - Scris ca putere cu baza 3, numărul $3^8 : 3^4$ este:
A. 3^2 ; B. 3^4 ; C. 3^{12} ; D. 3^{32} .
 - Efectuând calculul $5^6 \cdot 5^7 : 5^8$ și scriind rezultatul ca putere cu baza 5, se obține:
A. 5^4 ; B. 5^2 ; C. 5^5 ; D. 5^{21} .
 - Scris ca putere cu baza 7, numărul $(7^3)^2$ este:
A. 7^6 ; B. 7^5 ; C. 7^1 ; D. 7^9 .
- Copiați pe caiete, efectuați calculele, apoi completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
 - Numărul cu $(3^2)^2$ mai mare decât 82 este ...
 - Numărul de $(2^2 \cdot 2^3)$ ori mai mic decât 2^9 este ...
- Efectuați calculele și asociați fiecărei litere care identifică un calcul, în coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana B. Scrieți pe caiet asocierile, după modelul: (a → 4).

A	B
a. $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$	1. 2^6
b. $2^{13} : (1 + 7)^3$	2. 2^2
c. $4^{19} : (2^9)^4$	3. 2^4
d. $2^5 + 2^5$	4. 2^8
	5. 2^7

- Scriveți ca putere cu baza 2:
 - $2^2 \cdot 2^5$; c) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$;
 - $2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4$; d) $2^9 \cdot 2^7 \cdot 2 \cdot 2^5 \cdot 2$.

- Scriveți ca putere cu baza 3:
 - $3^9 : 3^5$; c) $3^{22} : 3^{15} \cdot 3^2 : 3^9$;
 - $3^{17} : 3^8 : 3^7$; d) $3^{11} : 3^7 : 3$.
- Scriveți ca putere cu baza 5:
 - $(5^2)^3$; c) $[(5^4)^3]^2$;
 - $(5^4 \cdot 5^3)^2$; d) $(25^2)^3 : (5^{10})$.
- Efectuați calculele:
 - $(2^4)^2 : 2^6$; f) $343 \cdot 49 : 7^4$;
 - $3^{11} : (3^3 \cdot 3^2)^2$; g) $(2^3 \cdot 3^2)^0$;
 - $27^3 \cdot 9^2 : 3^{11}$; h) $(3 \cdot 5^3)^1$;
 - $(5^6)^5 : (5^3)^9$; i) $(2^{13} \cdot 5^{12}) : (2^{10} \cdot 5^9)$.
 - $125^2 : 25^2 \cdot 5^2$;
- Considerăm numerele $x = 2^{11} \cdot 8^{10}$ și $y = 3^{45} \cdot 3^3$. Aflați numerele naturale a și b , știind că $(x \cdot y) : (2^a \cdot 3^b) = 2^{14} \cdot 3^7$.
- Aflați numărul x , din egalitățile:
 - $(2^x)^2 = 64$; d) $10^{x+2} = (2^2 \cdot 5^2)^2$;
 - $(5^x)^2 = 25^3$; e) $3 + 3^{x+1} = 30$;
 - $3 \cdot 9^x = 3^7$; f) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 112$.

Indicații.

- Folosim faptul că dacă a este număr natural nenul, iar n și m sunt numere naturale și $a^n = a^m$, atunci $n = m$.
- La f), avem $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 2^x \cdot (1 + 2 + 4) = 2^x \cdot 7$ și $112 = 16 \cdot 7$.
- Arătați că oricare ar fi numărul natural n , au loc egalitățile:
 - $2^n + 2^n = 2^{n+1}$;
 - $2^{n+1} - 2^n = 2^n$;
 - $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$;
 - $3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n$;
 - $2^{n+1} - 2^n - 2^{n-1} - \dots - 2^2 - 2^1 - 2^0 = 1$.



Minitest

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Rezultatul calculului $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3$ este:
A. 2^5 ; B. 2^6 ; C. 2^7 ; D. 2^8 .
 - Rezultatul calculului $3^{13} : 3^7 : 3^2$ este:
A. 3^{22} ; B. 3^3 ; C. 3^4 ; D. 3^8 .
 - Numărul $(5^2)^3 : 5^4$ este egal cu:
A. 25; B. 125; C. 5; D. 1.
 - Dacă $(2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^9) : (2^a \cdot 3^b \cdot 5^c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$, atunci $a + b + c$ este:
A. 7; B. 10; C. 9; D. 14.
- Scriveți numărul $2^2 \cdot 4 \cdot 8$ ca putere cu baza 2;
 - Scriveți numărul $3^4 \cdot 5^8$ ca putere cu exponentul 4.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Compararea puterilor numerelor naturale



Ne amintim

A compara două numere naturale x și y înseamnă a stabili care dintre relațiile $x < y$, $x = y$, $x > y$ are loc.

Ne propunem să comparăm două numere naturale scrise sub formă de puteri.

Din lecția anterioară, deducem ușor că două puteri care au *aceeași bază și același exponent* reprezintă două numere egale.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

E firesc să ne întrebăm care este relația între două numere care nu se pot scrie ca puteri cu aceeași bază și același exponent. Este destul de simplu să constatăm că nu sunt egale, dar ne propunem să găsim o modalitate de a stabili care dintre ele este mai mic sau care este mai mare.

1. Dacă se păstrează doar una din condițiile de scriere (sau aceeași bază, sau același exponent), sunt utile următoarele rezultate:

Cazul	Rezultatul folosit	Interpretarea rezultatului
a) Numerele se pot scrie ca puteri cu aceeași bază.	Dacă $a^n > a^m$, $a \geq 2$, atunci $n > m$. Dacă $n > m$, $a \geq 2$, atunci $a^n > a^m$.	Dintre două puteri cu aceeași bază, $a \geq 2$, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.
b) Numerele se pot scrie ca puteri cu același exponent.	Dacă $a^n > b^n$, $n \geq 1$, atunci $a > b$. Dacă $a > b$, $n \geq 1$, atunci $a^n > b^n$.	Dintre două puteri care au același exponent, $n \geq 1$, este mai mare puterea care are baza mai mare.

2. Dacă numerele nu se pot scrie nici ca puteri cu aceeași bază, nici ca puteri cu același exponent, comparăm numerele cu alte puteri, a căror ordine ne este cunoscută.

Reținem. Înainte de a compara două puteri, încercăm să le scriem într-o formă avantajoasă (cu aceeași bază, cu același exponent sau folosind puteri cunoscute, cărora le cunoaștem ordinea).



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație.

Comparați numerele:

- a) 125^{33} și $5 \cdot 625^{25}$;
- b) 2^{30} și 3^{20} ;
- c) 26^{27} și 27^{28} .

Soluție.

- a) $125^{33} = (5^3)^{33} = 5^{99}$; $5 \cdot 625^{25} = 5 \cdot (5^4)^{25} = 5 \cdot 5^{4 \cdot 25} = 5 \cdot 5^{100} = 5^{101}$.
Din $99 < 101$ rezultă $125^{33} < 5 \cdot 625^{25}$.
- b) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$; $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$. Din $8 < 9$, rezultă $2^{30} < 3^{20}$.
- c) $26 < 27$, deci $26^{27} < 27^{27}$; $27 < 28$, deci $27^{27} < 27^{28}$.
În concluzie, $26^{27} < 27^{27} < 27^{28}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Dintre numerele $a = 2^8$, $b = 2^2 \cdot 2^3$, $c = 2^{19} : 2^{12}$,
 $d = (2^3)^2$ este mai mare:

- A. d ; B. c ; C. b ; D. a .

b) Ordinea descrescătoare a numerelor $x = 3^6 \cdot 9$,
 $y = 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81$, $z = 3^{115} : (3^{37})^3$, $t = 3^7$, este:

- A. y, t, x, z ; B. z, y, x, t ; C. y, x, t, z ; D. x, y, z, t .

c) Dacă a, x, y sunt numere naturale,
 $a > 1$ și $a^x > a^y$, atunci:

- A. $x < y$; B. $x > y$; C. $x = y$; D. $x + y = 0$.

d) Dacă b, x, y sunt numere naturale și $2 < b < x < y$,
atunci:

- A. $b^x < b^y$; B. $b^x > b^y$; C. $b^x = b^y$; D. $b^x + b^y = 0$.

2. Copiați pe caiete, efectuați calculele, apoi completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
- Dintre numerele $a = 7^{22}$ și $b = (3 + 5)^{22}$ este mai mare ...
 - Dacă $a \neq b$, și $\overline{ab}^{10} < 12^{10}$, atunci $\overline{ab} = \dots$
 - Se știe că $2^{25} < 2^x < 2^y < 4^{14}$. Atunci, $x + y = \dots$
 - Puterile numărului 5, cuprinse între 25^3 și 5^9 sunt ...
3. Comparați numerele, scriindu-le ca puteri cu aceeași bază:
- 2^{103} și 2^{301} ;
 - 11^{3+3} și $11^{3 \cdot 3}$;
 - $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ și 3^{11} ;
 - $5^{54} : 5^{45}$ și 5^9 .
4. Comparați numerele, scriindu-le ca puteri cu același exponent:
- 56^{57} și 653^{57} ;
 - 3^{45} și 2^{60} ;
 - $5^{200} : 5^{150}$ și 3^{50} ;
 - $2^8 \cdot 2^7 \cdot 2^6$ și $3^3 \cdot 3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^7$.
5. Comparați numerele:
- 5^{20} și 2^{50} ;
 - $(2^{19})^3$ și 4^{27} ;
 - 3^{222} și 2^{333} ;
 - 49^{36} și 7^{73} .
6. Copiați pe caiete, apoi completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile $<$, $>$, $=$ astfel încât să obțineți enunțuri adevărate:
- $4^{10} \dots 2^{20}$;
 - $27^{12} \dots 81^8$
 - $3^{26} \dots 2^{39}$;
 - $18^{14} \dots 7^{21}$;
 - $25^{26} \dots 26^{27}$;
 - $2^{500} \dots 3^{300}$.
7. Scrieți în ordine crescătoare:
- $2^{50}, 4^{24}, 8^{17}$;
 - $3^{72}, 9^{37}, 27^{25}$;
 - $2^{90}, 3^{50}, 5^{40}, 7^{30}$.
8. Scrieți în ordine descrescătoare:
- $25^{50}, 125^{33}, 5 \cdot 625^{25}$;
 - $2^{x-1}, 2^{x+1}, 4^x$, pentru $x > 2$;
 - $2^{10} \cdot 3^9 \cdot 5^8, 2^8 \cdot 3^9 \cdot 5^{10}, 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^8$.
9. Scrieți în ordine crescătoare numerele $7^{77}, 77^7, 777, (7^7)^7$.
10. Determinați numărul natural x pentru care:
- $2^x < 16$;
 - $3^{x+2} < 81$;
 - $32 < 2^x < 128$;
 - $30 < 5^x + 5 < 630$.



Minitest

- (3 × 10p) 1. Copiați pe caiete, apoi completați în caseta liberă litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
$(4 + 7)^5 > (21 - 9)^5$.	
$5 \cdot 5^5 \cdot 5^9 < 25^8$.	
$a^6 > a^4$, oricare ar fi numărul natural nenul a .	

2. Comparați:
- (15p) a) pătratul numărului 100 cu cubul numărului 10;
- (15p) b) cubul numărului 49 cu pătratul numărului 125.
3. Fie numerele $A = 4^{25}$ și $B = 6^{20}$.
- (15p) a) Scrieți numărul A în forma 2^a și numărul B în forma $2^b \cdot 3^c$.
- (15p) b) Arătați că $A < B$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L4 Pătratul unui număr natural



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

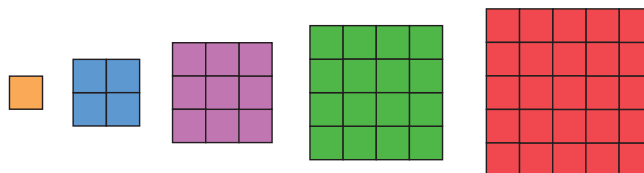
Activitate practică

Desenați pe caiete, folosind rețeaua de pătrățele, pătratele din imaginea alăturată. Lungimea laturii unui pătrățel al paginii reprezintă unitatea de măsură.

- Identificați lungimea laturii fiecărui pătrat dintre cele cinci.
- Calculați numărul pătrățelilor cu latura de lungime 1, în care se descompune fiecare pătrat desenat.
- Stabiliți pentru care numere naturale n , se poate forma un pătrat prin alăturarea a n pătrățele de același fel.

Soluție.

a) Lungimile laturilor sunt: 1, 2, 3, 4 respectiv 5 (unități).



b) $1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; $25 = 5^2$

c) Se poate forma un pătrat prin alăturarea a n pătrățele de același fel, dacă n este puterea a doua (pătratul) unui număr natural a , întrucât este nevoie de exact a straturi a câte a pătrățele, adică $n = a \cdot a = a^2$ (pătrățele).

În general, numărul pătratelor cu latura de lungime 1 în care se poate descompune un pătrat cu latura de lungime a unități este a^2 .

Pe de altă parte, un număr natural n este *pătratul* unui număr natural dacă se poate forma un pătrat prin alăturarea a n pătrățele de același fel, adică dacă n se poate scrie sub forma $n = a^2$, unde a este număr natural.

Numărul natural n este *pătrat perfect* dacă există un număr natural a astfel încât $n = a^2$.

Exemple: Sunt pătrate perfecte numerele: 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; ... pentru că $0 = 0^2$; $1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; $25 = 5^2$; $36 = 6^2$.

Numerele naturale n^2 și $(n + 1)^2$ se numesc *pătrate perfecte consecutive*.

Sunt pătrate perfecte consecutive perechile de numere: $4 = 2^2$ și $9 = 3^2$; $225 = 15^2$ și $256 = 16^2$; $100 = 10^2$ și $121 = 11^2$.

În multe situații practice, este esențial să stabilim dacă un număr natural este pătrat perfect.

1. Dacă un număr natural se poate scrie ca *putere cu exponent par*, atunci el este pătrat perfect:

$$a^{2k} = a^{k \cdot 2} = (a^k)^2, \text{ deci } a^{2k} \text{ este pătratul numărului natural } a^k.$$

2. Produsul oricăror două pătrate perfecte este un pătrat perfect: $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$.

Observație. Deducem că dacă toți factorii unui produs sunt pătrate perfecte, atunci acest produs este pătrat perfect.

3. Dacă un număr natural este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, atunci acest număr *nu este pătrat perfect*.

1. $13^{248} = (13^{124})^2$, deci 13^{248} este pătratul numărului 13^{124} .

2. $2^2 \cdot 5^2 \cdot 29^2 = (2 \cdot 5 \cdot 29)^2 = 290^2$, adică produsul $2^2 \cdot 5^2 \cdot 29^2$ este pătratul numărului natural 290, deci pătrat perfect.

3. 110 nu este pătrat perfect pentru că $100 < 110 < 121$, iar $100 = 10^2$ și $121 = 11^2$ sunt pătrate perfecte consecutive.

O altă tehnică, prin care putem decide dacă un număr natural este pătrat perfect, presupune determinarea ultimei cifre a numărului. În acest scop, avem nevoie de următoarele rezultate:

Ultima cifră a unei sume este egală cu ultima cifră a sumei dintre ultimele cifre ale termenilor.

Ultima cifră a unui produs este egală cu ultima cifră a produsului dintre ultimele cifre ale factorilor.

Ultima cifră a puterii a n -a a numărului natural a este egală cu ultima cifră a puterii a n -a a ultimei cifre a bazei (a numărului a).

Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi una dintre cifrele: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Afirmația de mai sus conduce la concluziile:

a) Dacă ultima cifră a unui număr este una dintre cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9, atunci numărul poate fi pătrat perfect sau poate să nu fie pătrat perfect.

b) Dacă ultima cifră a unui număr natural este una dintre cifrele 2, 3, 7, 8, atunci numărul dat nu este pătrat perfect.

Ultima cifră a sumei $2794 + 2979$ este egală cu ultima cifră a sumei $4 + 9$, adică ultima cifră a numărului 13, deci 3.

Ultima cifră a produsului $2794 \cdot 2978$ este egală cu ultima cifră a produsului $4 \cdot 8$, adică ultima cifră a numărului 32, deci 2.

Ultima cifră a puterii 2794^{11} este egală cu ultima cifră a puterii 4^{11} . Observând ultima cifră a puterilor numărului 4, vom constata că toate puterile cu exponent impar au ultima cifră 4, deci ultima cifră a numărului 2794^{11} este 4.

Ultima cifră a numărului a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ultima cifră a numărului a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Exemple.

a) 256 este pătrat perfect, iar 356 nu este pătrat perfect, deși ambele au ultima cifră egală cu 6.

$$256 = 16^2 \text{ și } 18^2 = 324 < 356 < 361 = 19^2.$$

b) Ultima cifră a numărului 1572^3 este 8, deci nu este pătrat perfect, adică nu se poate scrie ca puterea a 2-a a unui număr natural.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație

a) Determinați ultima cifră a numărului $2^{2022} \cdot 7^{31}$.

b) Decideți, argumentat, care dintre numerele următoare sunt pătrate perfecte: 3003 ; 25^{703} ; 17^{12} ; $625 \cdot 7^6$; $(n+1) \cdot (n+2)$;

Soluție. **a)** $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$. Ultima cifră se repetă din 4 în 4, după cum urmează:

Restul împărțirii exponentului la 4	0	1	2	3
Ultima cifră	6	2	4	8

Din $2^{2022} = 2^{504 \cdot 4 + 2}$ deducem că ultima cifră a numărului 2^{2022} este egală cu ultima cifră a numărului 2^2 , adică 4.

În mod asemănător, vom ști că ultima cifră a numărului 7^{31} este 3, deci produsul are ultima cifră egală cu ultima cifră a produsului $4 \cdot 3$, adică 2.

b) 3003 are ultima cifră 3, deci nu este pătrat perfect; $25^{703} = (5^2)^{703} = (5)^{2 \cdot 703} = (5^{703})^2$, deci este pătrat perfect; 17^{12} are exponentul par, deci este pătrat perfect; $25^7 \cdot 7^6 = 5^{14} \cdot 7^6$, care este produsul a două pătrate perfecte, deci este pătrat perfect; $(n+1)^2 < (n+1) \cdot (n+2) < (n+2)^2$, adică $(n+1) \cdot (n+2)$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, deci nu este pătrat perfect.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Pătratul numărului 23 este:
A. 230; B. 46; C. 529; D. 69.
 - Dintre următoarele numere, nu este pătratul unui număr natural:
A. 3^2 ; B. 169; C. 55^2 ; D. 2^3 .
 - Numărul pătratelor perfecte din șirul: 1, 49, 76, 89, 121, 153, 256, 400, 1000, 2022 este:
A. 5; B. 3; C. 7; D. 2.
 - Dacă numărul $250x$ este pătrat perfect, atunci cifra x este:
A. 8; B. 0; C. 1; D. 5.
- Copiați pe caiete, apoi completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
 - Pătratul celui mai mare număr par de două cifre este ...
 - Dacă $52x$ este pătrat perfect, atunci $x = \dots$
 - Un pătrat perfect de forma \overline{abc} , cu $c \neq 0$ și $a + b + c = 4$, este ...
- Copiați pe caiete și completați în caseta liberă litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.
- Calculați pătratele numerelor 13, 18, 23, 45, 50, 70, 99, 101, 150.
- Arătați că numerele 196, 361, 841, 1089, sunt pătrate perfecte.
- Scrieți toate pătratele perfecte cuprinse între 57 și 257.
- Scrieți pe caiete numerele: 1, 9, 58, 81, 142, 289, 324, 478, 1001, 3025.
 - Subliniați numerele care sunt pătrate perfecte și justificați alegerea făcută.
- Scrieți pe caiete numerele: 27, 49, 74, 144, 192, 256, 484, 1024, 3003.
 - Subliniați numerele care nu sunt pătrate perfecte și justificați alegerea făcută.
- Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte:
 $a = 78 \cdot 87 + 9 \cdot 87$;
 $b = 69 \cdot 59 - 9 \cdot 59 - 59$;
 $c = 123 + 123^2 + 124$;
 $d = 2023^2 - 2023 - 2022$.
- Demonstrați că oricare ar fi numărul natural n , următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:
 $a = 1^n + 172$; $b = 5^n + 293$; $c = 5 \cdot n + 3$; $d = 10 \cdot n + 3$.
- Scrieți numărul 100 ca sumă a două pătrate perfecte.
- Aflați toate numerele \overline{aa} și \overline{bb} pentru care $\overline{aa} + \overline{bb}$ este pătrat perfect.

Propoziția	A/F
p_1 : Numărul 1024 este pătratul numărului 32.	
p_2 : Numărul $2 \cdot n$ este pătratul numărului n , oricare ar fi numărul natural n .	
p_3 : Numărul $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ este pătratul numărului 81.	
p_4 : Orice număr natural care are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 este pătrat perfect.	



Minitest

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - (10 p) Pătratul numărului 35 este:
A. 70; B. 140; C. 1425; D. 1225.
 - (15 p) Pătratul numărului 100 este mai mare decât 100 cu:
A. 1000; B. 9900; C. 9000; D. 900.
 - (15 p) Numărul pătratelor de două cifre este:
A. 6; B. 5; C. 7; D. 10.
 - (10 p) Ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi:
A. 0; B. 4; C. 3; D. 1.
- Arătați că:
 - (20 p) 784 este pătrat perfect;
 - (20 p) 845 nu este pătrat perfect.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L5 Scrierea numerelor naturale în baza 10. Scrierea numerelor naturale în baza 2



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Scrierea în baza 10

În mod uzual, folosim scrierea numerelor naturale în baza 10 (în sistemul zecimal de numerație), în care 10 unități de un anumit ordin reprezintă o unitate de ordin imediat superior.

Folosind puterile numărului 10, descompunerea zecimală a unui număr natural conduce la afirmația:

Orice număr natural n se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 10^k , k natural, iar celălalt factor este una dintre cifrele: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

De exemplu, orice număr natural de 4 cifre se scrie, descompus după puterile lui 10, astfel:

$n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$, unde a, b, c, d reprezintă cifrele numărului. Numărul n se notează $\overline{abcd}_{(10)}$ sau \overline{abcd} .

Scrierea în baza 2

În practică, putem scrie numerele naturale și în alt sistem de numerație, de exemplu în baza 2. Vom folosi doar cifrele 0 și 1, iar 2 unități de un anumit ordin va reprezenta o unitate de ordin imediat superior.

Folosind puterile numărului 2, obținem descompunerea numărului în baza 2 (sistemul binar de numerație).

Orice număr natural m se poate scrie ca sumă de produse în care un factor este de forma 2^k , iar celălalt factor este una din cifrele: 0, 1.

De exemplu, un număr natural m se poate scrie, descompus după puterile lui 2, astfel:

$m = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$, unde a, b, c, d reprezintă cifrele numărului, în baza 2 și vom scrie $\overline{abcd}_{(2)}$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Egalitatea $\overline{abcd}_{(2)} = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2^1 + d \cdot 2^0$ permite trecerea unui număr natural din baza 2 în baza 10 și invers.

Exemple:

1) $110_{(2)} = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)_{(10)} = 6_{(10)}$.

2) $6_{(10)} = (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0)_{(10)} = 110_{(2)}$.

Pentru ca un număr scris în baza 2 să fie exprimat în baza 10, este suficient să-l scriem descompus după puterile lui 2 și să efectuăm calculele.

Pentru ca un număr scris în baza 10 să fie exprimat în baza 2, trebuie găsite cifrele numărului (în baza 2), adică trebuie să-l descompunem după puterile lui 2, cu factorii 0 sau 1. În acest scop, efectuăm împărțiri succesive la 2 și identificăm cifrele.

Exemplu: Ne propunem să scriem numărul 29 din baza 10 în baza 2.

1) Efectuăm împărțiri succesive la 2 și păstrăm restul, câtul devenind deîmpărțit pentru pasul următor. Ultima împărțire are deîmpărțitul egal cu 1.

2) Scriem numărul în baza 2, astfel:

- Ultimul rest este întotdeauna 1 și reprezintă prima cifră a numărului, exprimat în baza 2.
- Numărul cifrelor este egal cu numărul împărțirilor efectuate.
- Cifrele se scriu, de la stânga la dreapta, în ordinea inversă găsirii lor.

(1) $29 = 2 \cdot 14 + 1$

(2) $14 = 2 \cdot 7 + 0$

(3) $7 = 2 \cdot 3 + 1$

(4) $3 = 2 \cdot 1 + 1$

(5) $1 = 2 \cdot 0 + 1$

$29_{(10)} = (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)_{(10)} = 11101_{(2)}$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Scris cu ajutorul puterilor lui 10, numărul 2022 este:

A. $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$; B. $2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
 C. $2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$; D. $2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.
 - Scris cu ajutorul puterilor lui 2, numărul 10 este:

A. $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$; B. $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$;
 C. $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$; D. $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.
 - Numărul $4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0$, este:

A. 4532; B. 45322; C. 45032; D. 45302;
 - Scris în baza 10, numărul $10101_{(2)}$ este egal cu:

A. 19; B. 22; C. 21; D. 20.
- Completați în casete numere naturale astfel încât să obțineți afirmații adevărate:
 - $1234_{(10)} = (1 \cdot 10^{\square} + 2 \cdot 10^{\square} + 3 \cdot 10^{\square} + \square \cdot 10^0)_{(10)}$;
 - $1110111_{(2)} = (1 \cdot 2^{\square} + 1 \cdot 2^{\square} + 1 \cdot 2^{\square} + \square \cdot 2^{\square} + 1 \cdot 2^{\square} + 1 \cdot 2^{\square} + \square \cdot 2^0)_{(10)}$.
- Copiați tabelul pe caiete, efectuați calculele necesare și completați în casetele libere numerele corespunzătoare.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Numărul, în baza 10	1		47		138	
Numărul, în baza 2		101		1100		1101011

4. Scrieți numerele naturale ale căror descompuneri zecimale sunt:
 - $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;
 - $7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$;
 - $5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
 - $7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^1$.
 5. Scrieți în baza 2 numerele.
 - $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$;
 - $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$;
 - $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0$;
 - $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$.
 6. Descompuneți în baza 10 numerele:

758, 1213, 76005, $\overline{4a5}$, $\overline{9a9b9}$.
 7. Scrieți în baza 10 numerele:

$11_{(2)}$; $1010_{(2)}$; $11100_{(2)}$; $1000001_{(2)}$; $10101011_{(2)}$.
 8. Stabiliți numărul cifrelor pentru numerele:
 - $7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2$, scris în baza 10;
 - $2^4 + 2^6$, scris în baza 2.
 9. Scrieți în baza 2 numerele:
 - 2; 3; 4; 8; 9; 11; 35; 72; 31;
 - 5; 12; 10; 6; 7; 13; 14; 21.



Minitest

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - (20p) a) Numărul în baza zece care are descompunerea $1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0$ este:

A. 3181; B. 1803; C. 3081; D. 1830.
 - (20p) b) Numărul 55 scris în baza 2, este:

A. 110 111; B. 111 011; C. 111 101; D. 111 001.
 - (20p) c) Dacă $x + y = 6$, atunci $x^2 + y^3$ este:

A. 55; B. 125; C. 65; D. 105.
- (20p) a) Aflați cifrele a și b știind că numărul $9 \cdot 10^2 + a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$ este pătratul unui număr natural.
 - (10p) b) Aflați numărul c , știind că $100\,000_{(2)} = 2^c$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Din clasele anterioare, știm să efectuăm calcule, folosind operații de *ordinul I* (adunarea și scăderea) sau de *ordinul II* (înmulțirea și împărțirea), cu paranteze rotunde (...) sau cu paranteze drepte [...].

În clasa a V-a, în exerciții, apar operații de *ordinul III* (puteri ale numerelor naturale și operații cu puteri) și întâlnim un al treilea tip de paranteze, numite acolade {...}.

Corectitudinea rezultatului oricărui calcul cu numere naturale depinde de respectarea cu strictețe a ordinii efectuării operațiilor.



Rezolvăm și observăm

Exercițiul 1. Efectuați calculele: $10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 68 : 4 - 17)]$.

Rezolvare

Etapă	Calcul	Redactare
Pas 1. Efectuăm operațiile de ordin doi din paranteza rotundă	$4 + 68 : 4 - 17 = 4 + 17 - 17$	Rezolvarea exercițiului se scrie/ se redactează astfel:
Pas 2. Efectuăm operațiile de ordin unu din paranteza rotundă	$4 + 17 - 17 = 4$	$10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 68 : 4 - 17)] =$
Pas 2'. Transformăm paranteza dreaptă în paranteză rotundă [...] → (...)	$10 \cdot (5 + 6 \cdot 4)$	$= 10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 17 - 17)] =$
Pas 3. Efectuăm calculele din noua paranteză rotundă	$5 + 6 \cdot 4 = 5 + 24 = 29$	$= 10 \cdot (5 + 6 \cdot 4) =$
Pas 3'. Eliminăm paranteza	$10 \cdot 29$	$= 10 \cdot (5 + 24) =$
Pas 4. Efectuăm calculele	$10 \cdot 29 = 290.$	$= 10 \cdot 29 =$
		$= 290.$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Exercițiul 2. Adrian face, succesiv (unul după altul), următoarele calcule:

C1. adună numărul 4 cu câtul împărțirii lui 68 la 4, apoi scade numărul 17;

C2. adună numărul 5 cu produsul dintre 6 și rezultatul de la C1;

C3. adună numărul 50 cu produsul dintre 10 și rezultatul obținut la C2.

C4. înmulțește ultimul rezultat cu 3, apoi scade 696.

Scrieți toate calculele de mai sus sub forma unui singur exercițiu și aflați rezultatul final, efectuând operațiile conținute de exercițiul găsit.

Rezolvare. C1, C2, C3, C4 se scriu ca un singur exercițiu astfel: $3 \cdot \{50 + 10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 68 : 4 - 17)]\} - 696.$

Pentru $10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 68 : 4 - 17)]$ putem folosi exercițiul 1, sau parcurgem toate etapele. Noutatea constă în apariția acoladei {...}.

În tabelul următor, detaliem etapele parcurse pentru efectuarea calculelor și prezentăm încă un model de redactare a rezolvării.

Etapă	Calcul	Redactare
Pas 1. Efectuăm calculele din paranteza rotundă.	$4 + 68 : 4 - 17 = 4$	Rezolvarea exercițiului se scrie/ se redactează astfel: $3 \cdot \{50 + 10 \cdot [5 + 6 \cdot (4 + 68 : 4 - 17)]\} - 696 =$ $= 3 \cdot [50 + 10 \cdot (5 + 6 \cdot 4)] - 696 =$ $= 3 \cdot (50 + 290) - 696 =$ $= 3 \cdot 340 - 696 =$ $= 1020 - 696 =$ $= 324.$
Pas 1'. {...} → [...] și [...] → (...)	$3 \cdot [50 + 10 \cdot (5 + 6 \cdot 4)] - 696$	
Pas 2. Efectuăm calculele din noua paranteză rotundă.	$5 + 6 \cdot 4 = 29$	
Pas 2'. [...] → (...)	$3 \cdot (50 + 10 \cdot 29) - 696$	
Pas 3. Efectuăm calculele din noua paranteză rotundă	$50 + 10 \cdot 29 = 50 + 290 = 340$	
Pas 3'. Eliminăm paranteza	$3 \cdot 340 - 696$	
Pas 4. Efectuăm calculele	$1020 - 290 = 324.$	

Observație. Scrierea unui calcul cu multe operații sub formă de exercițiu este, de regulă, avantajoasă.

Exercițiul 3. Efectuați calculul: $3 \cdot 5^2 - 4^2 + 53^1 \cdot 2$.

Rezolvare

Etapă	Calcul	Redactare
Pas 1. Efectuăm operațiile cu puteri	$5^2 = 25; 4^2 = 16; 53^1 = 53.$	$3 \cdot 5^2 - 4^2 + 53^1 \cdot 2 =$ $= 3 \cdot 25 - 16 + 53 \cdot 2 =$ $= 75 - 16 + 106 =$ $= 59 + 106 = 165.$
Pas 2. Efectuăm celelalte operații, folosind rezultatele obținute.	$3 \cdot 25 - 16 + 53 \cdot 2 =$ $= 75 - 16 + 106 = 59 + 106 = 165.$	

Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau pe parcursul rezolvării, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.

Exemplu.

$$(4^{10} : 2^{11} - 512)^8 + 37^2 - 31 \cdot 37 = (2^{20} : 2^{11} - 512)^8 + 37^2 - 31 \cdot 37 =$$

$$= (2^9 - 512)^8 + 37^2 - 31 \cdot 37 = (512 - 512)^8 + 37^2 - 31 \cdot 37 =$$

$$= 0^8 + 37^2 - 31 \cdot 37 = 37 \cdot (37 - 31) = 37 \cdot 6 = 222.$$

Consultați manualul digital pentru a „descoperi” strategii avantajoase de parcurgere și efectuare a operațiilor.



Reținem

1. Dacă exercițiul conține doar operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

2. Dacă exercițiul are operații de ordine diferite dar nu conține paranteze, atunci se efectuează operațiile de ordin trei, apoi de ordin doi și la final de ordinul întâi, respectând ordinea de la **1**, adică:

- Se efectuează operațiile cu puteri și ridicările la putere.
- Se efectuează înmulțirile și împărțirile, folosind rezultatele de la etapa anterioară și respectând ordinea de la **1**.
- Se efectuează adunările și scăderile, folosind rezultatele de la etapa anterioară și respectând ordinea de la **1**.

Observație: Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau pe parcursul rezolvării, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.

3. Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:

- Se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.
- Se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.
- Se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă la **2**.

Se continuă, în acest mod, până când se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.



- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Rezultatul calculului $12 \cdot 34 + 280 : 5$ este:
A. 444; B. 454; C. 464; D. 434.
 - Numărul cu 2^4 mai mare decât 44 este:
A. 52; B. 60; C. 56; D. 62.
 - Numărul $a = 150 : 5^2$ este mai mic decât numărul $b = 320 : 2^5$ cu:
A. 6; B. 8; C. 2; D. 4.
 - Rezultatul calculului $[(201 - 11^2) : 10 + 2^2 \cdot 5] : 4$ este:
A. 10; B. 9; C. 8; D. 7.
- Simona înmulțește numărul 5 cu 2^3 , adună rezultatul cu 3^2 , apoi împarte suma la 7. Din numărul obținut scade $(2 \cdot 3)^0$ și ridică totul la puterea a doua. Scrieți enunțul sub forma unui exercițiu și aflați rezultatul final, efectuând calculele conținute de exercițiu.
- Asociați fiecărei litere corespunzătoare unui calcul din coloana A, cifra corespunzătoare răspunsului corect aflat în coloana B.

A	B
a. $3^4 - 8^2 =$	1. 12
b. $2 \cdot 2^4 - 160 : 10 =$	2. 15
c. $(3^3 - 5^2) \cdot (980 : 7^2 - 13) =$	3. 14
d. $1249 - (1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0) =$	4. 16
	5. 17

- Copiați pe caiete, apoi completați în caseta liberă litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Suma celor mai mici trei puteri ale lui 5 este 31.	
p_2 : Numărul $7^2 + 8 \cdot 49$ este pătratul unui număr natural.	
p_3 : Numărul $10^3 - 270 - 1$ este cubul unui număr natural.	
p_4 : Dacă $3 \cdot x^3 = 192$, atunci $x = 8$.	

- Efectuați calculele:
 - $24 \cdot 16 - 1050 : 75 + 3$;

- $25 \cdot 8 + 25 \cdot 88 - 5^2 \cdot 93$;
- $4 \cdot [27 + 5 \cdot (31 - 225 : 15)]$;
- $(3^0 + 4^5) : (1 + 2^{10})$;
- $2^5 - (31 + 30^2 - 29 \cdot 31)$
- $[2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2] : 6 + 5^3$: 26.

- Calculați:

- $17 \cdot (4^3 - 7 \cdot 3^2) + 83^1$;
- $(6^2 - 2^6 : 4) : 5 + 1^2$;
- $(2 + 2)^2 - 4^2 + 234$;
- $5 + 5^8 : 5^6 + 5^4 : 25$.

- Efectuați:

- $600 - 300 : (200 - 125)$;
- $[156 - 9 \cdot (132 - 11^2)] : 19$;
- $(12^3 + 13^2)^0 + 12 \cdot 13$;
- $(2^5 - 3^3)^2 + 2^{24} : 4^{11}$.

- Scrieți numărul 2^{20} :

- ca sumă a două puteri ale lui 2;
- ca sumă a trei puteri ale lui 2;
- sub forma $4^b \cdot 8^c$.

- Fie $A = 120 + 2 \cdot [1472 : 8^2 + 5 \cdot (441 : 63 - 2^2)]$.



- Arătați că numărul A este pătrat perfect.
- Aflați cel mai mic număr natural B, pentru care $A + B$ este cub perfect.

- Calculați:

- $(2^{12} + 2^{13}) : 2^{12} - 3$;
- $(2^n + 2^n) : 2^{n+1} + 25$, n număr natural;
- $(3^4 \cdot 5 + 3^4 \cdot 55 + 3^4 \cdot 940) : (3^3 \cdot 10^2)$.

- Comparați numerele $a = 2^{98} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$ și $b = 8^{34}$.

- Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- „Ultima cifră a numărului $1^{11} + 2^{22} + 3^{33} + 4^{44}$ este 5”
- „Restul împărțirii numărului $5^{55} + 66^6 + 77^7$ la 10 este 8”

- Se consideră numerele:

- $$a = (9^8 : 3^{11} - 242)^2 + 9 \cdot 9^3,$$
- $$b = 11 \cdot 10^4 - 2^5 \cdot 5^5 \text{ și}$$
- $$c = (2^4 \cdot 3^5 \cdot 5) : (2^3 \cdot 3^4 \cdot 10) + 20^3.$$

- Efectuați calculele și stabiliți ordinea crescătoare a celor trei numere.
- Arătați că numărul $a + b - c$ nu este un pătrat perfect.





Minitest

1. Calculați:

(25 p) a) $(3^{12} + 3^{13}) : 3^{12} - 4$; (25 p) b) $2 + 2^8 : 2^6 + 2^4 : 4$

(40 p) 2. Scrieți sub formă de exercițiu și rezolvați: Înmulțesc cubul numărului 5 cu puterea a șasea a numărului 2, apoi scad din numărul obținut câtul împărțirii lui 10^5 la 10^2 . Împart rezultatul la 10^3 , adun ceea ce obțin cu 29^1 și scad din noul rezultat 2^2 .

Se acordă 10 puncte din oficiu

Test de evaluare/autoevaluare nr. 1

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

- (5p) 1. Puterea a doua a numărului 37 este
 (5p) 2. Scris ca o singură putere, numărul $2^5 \cdot 11^5$ devine
 (5p) 3. Numărul cu 5^2 mai mic decât 2^5 este
 (5p) 4. Dacă numărul $x5$ este pătrat perfect, atunci 10^x , este egal cu

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Dacă $3^4 \cdot 3^a = 3^{12}$, atunci a este:
 A. 3; B. 8; C. 9; D. 6.
 (5p) 2. Dacă $5^{20} : 5^b = 5^4$, atunci b este:
 A. 4; B. 5; C. 8; D. 16.
 (5p) 3. Dacă $(7^a)^b = 7^7$, atunci $a + b$ este:
 A. 8; B. 7; C. 10; D. 9.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (20p) 1. Aflați cel mai mare număr natural n și cel mai mic număr natural m pentru care $n^2 < 200 < m^3$.
 (15p) 2. Efectuați următoarele calcule:
 a) $9^2 - 3^2 \cdot 2^3$; b) $5^8 : 5^5 - 11^2$; c) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 4^5 : 2^7) : 6^2$.
 (20p) 3. Se consideră numerele $x = 2^2 \cdot 16^4$ și $y = 4^3 \cdot 8^5$.
 a) Comparați numerele x și y . b) Arătați că $x \cdot y < 10^{13}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare nr. 2

I. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

- (5p) 1. Suma dintre dublul numărului 123 și produsul celor mai mici trei numere impare este
 (5p) 2. Diferența dintre triplul numărului 456 și pătratul numărului 21 este
 (5p) 3. Rezultatul calculului $10\ 000 : 10^2 - 20\ 000 : 50^2$ este
 (5p) 4. Calculând $12 \cdot 34 + 12 \cdot 56 + 12 \cdot 110$ se obține

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Cel mai mare număr natural, mai mic decât $a = (8 - 7) \cdot (8 + 7) + (8 \cdot 7)^0$, este:
 A. 17; B. 18; C. 15; D. 16.
 (5p) 2. Cel mai mic număr natural, mai mare decât $b = 23 + 24 \cdot (25 - 225 : 15)$, este:
 A. 264; B. 265; C. 262; D. 263.
 (5p) 3. Dacă n este număr natural și între 7^2 și n sunt cuprinse 77 numere naturale, atunci n este:
 A. 126; B. 127; C. 128; D. 129.

III. Pe foaia de test, sau pe caiete, scrieți rezolvările complete.

- (20p) 1. Sonia a citit o carte în cinci zile, în fiecare zi același număr de pagini. Știind că în primele trei zile a citit 171 de pagini, aflați câte pagini are cartea.
 (20p) 2. Arătați că numărul $A = 19 + 5^{12} : 5^9 - [(2^3)^2 - 3^2 \cdot 4 + 840 : (2^3 \cdot 3)]$ este pătratul unui număr natural.
 3. Se consideră numerele: $x = [200 - 200 : (25 \cdot 3 - 25)] : 14$ și $y = 3^1 + (17 \cdot 17 + 17) : 3^2 + (26 \cdot 26 + 26) : 3^3$.
 (10p) a) Aflați numerele x și y .
 (5p) b) Precizați ultima cifră a numărului $x^2 \cdot y$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

4

METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

Metodele aritmetice de rezolvare a problemelor presupun folosirea unor *algoritmi* de rezolvare dar și imaginație, creativitate, flexibilitate, pentru a alege *metoda optimă* de rezolvare sau pentru a *combina* metode diferite în scopul obținerii rezultatelor în cel mai avantajos mod.

În general, pentru a rezolva o problemă de aritmetică, trebuie parcurse următoarele etape:

- Se identifică ipoteza (ce se cunoaște în problemă) și concluzia problemei (ce trebuie să demonstrăm, să calculăm, să aflăm).
- Se stabilesc dependențele între mărimile care apar în problemă.
- Se alege metoda de rezolvare.
- Se scriu schematic datele problemei, se realizează reprezentări, astfel încât să fie evidențiate dependențele necesare aplicării metodei alese.
- Se efectuează calculele necesare și se scrie soluția problemei.



L1 Metoda reducerii la unitate



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Considerăm două mărimi între care are loc una din dependențele:

1. Valorile celor două mărimi cresc sau descresc, în același timp, de același număr de ori. *Exemplu.* viteza cu care se deplasează un vehicul și *distanța* parcursă într-un interval de timp dat.
2. Când valoarea unei mărimi crește de un număr de ori, valoarea celeilalte descrește de același număr de ori. *Exemplu.* viteza cu care se deplasează un vehicul și *timpul* de parcurgere a unei distanțe date.

Rezolvarea problemelor prin *metoda reducerii la unitate* constă în a trece de la compararea valorilor a două mărimi date în ipoteză, la compararea cu doar una dintre ele, considerată *unitate*. Modul în care *depind* mărimile unele de altele este esențial în astfel de probleme.

Problema 1. Elevii clasei a V-a A au plătit 288 de lei pentru cele 24 de bilete la un spectacol de teatru. Aflați ce sumă ar achita pentru același spectacol un grup de 15 elevi.



Soluție explicită: Stabilim că dacă numărul biletelor cumpărate crește de un număr de ori, atunci suma care reprezintă contravaloarea acestora în bani crește de același număr de ori.

Aflăm cât costă *un bilet* (etapa I)

Aflăm cât costă 15 bilete. (etapa a II-a)

Dacă 24 de bilete costă 288 lei, atunci *un bilet* costă de 24 ori mai puțin, adică $288 : 24 = 12$ (lei).

Dacă un bilet costă 12 lei, atunci 15 bilete costă de 15 ori mai mult, adică $12 \cdot 15$ (lei) = 180 lei.



Dicționar

optimă = cea mai bună, potrivită

Scrierea schematică a rezolvării, pornind de la datele problemei:

Datele problemei: 24 elevi 288 lei
 15 elevi x lei

Rezolvare:
 Etapa I: 24 elevi 288 lei,
 1 elev $288 : 24$ (lei) = 12 (lei).

Etapa a II-a: 1 elev 12 lei,
 15 elevi $12 \cdot 15$ (lei) = 180 (lei).

Răspuns: Suma pe care trebuie să o achite cei 15 elevi este 180 lei.



Problema 2. O echipă formată din 12 muncitori termină o lucrare în 9 zile. Aflați în câte zile va termina lucrarea o echipă care este formată din 18 muncitori.



Soluție: Stabilim că dacă numărul muncitorilor crește de un număr de ori, atunci timpul de realizare a lucrării, reprezentat în zile de lucru, *decrește* de același număr de ori.

Aflăm în cât timp ar termina lucrarea *un singur muncitor*.
 (etapa I)

Aflăm în cât timp ar termina lucrarea 18 muncitori.
 (etapa a II-a)

Dacă 12 muncitori termină lucrarea în 9 zile, atunci un muncitor va termina lucrarea într-un timp de 12 ori *mai mare*, adică $9 \cdot 12$ (zile) = 108 (zile).

Dacă un muncitor termină lucrarea în 108 zile, atunci 18 muncitori vor termina lucrarea într-un timp de 18 ori *mai mic*, adică $108 : 18$ (zile) = 6 (zile).

Scrierea schematică a rezolvării, pornind de la datele problemei:

Datele problemei:	Rezolvare
12 muncitori 9 zile	Etapa I: 12 muncitori 9 zile, 1 muncitor $9 \cdot 12 = 108$ (zile).
18 muncitori <u>x zile</u>	Etapa a II-a: 1 muncitor 108 zile, 18 muncitori $108 : 18 = 6$ (zile).

Răspuns: Echipa de 18 muncitori poate termina lucrarea în 6 zile.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Am văzut în problemele de mai sus că pentru rezolvarea corectă, folosind metoda reducerii la unitate, este esențial să stabilim, mai întâi, *modul în care depind* mărimile unele de altele.

- În fiecare zi a unei săptămâni, Andrei rezolvă a probleme, iar Andra rezolvă b probleme, astfel încât b este dublul numărului a . Copiați pe caiete enunțul „Dacă a crește de n ori, atunci $b \dots$ de n ori”, apoi alegeți unul dintre cuvintele *crește* sau *decrește* și completați spațiul liber pentru a obține o afirmație adevărată. **Soluție.** Dacă a se înmulțește cu n , atunci b devine $2 \cdot (a \cdot n) = (2 \cdot a) \cdot n = b \cdot n$, deci: dacă a *crește* de n ori, atunci b *crește* tot de n ori.

2. Pentru două mărimi care cresc în același timp, de același număr de ori, formulați o problemă ale cărei date să poată fi scrise schematic în forma:

10 _____ 170 _____;

29 _____ x _____.

Rezolvați problema formulată, x fiind număr natural.

Rezolvare.

10 elevi 170 lei;

1 elev $170 : 10 = 17$ (lei)

Mărimile cresc în același timp, de același număr de ori.

Un exemplu de problemă:

Un grup de 10 copii contribuie la o donație, fiecare cu aceeași sumă de bani, adunând în total 170 de lei. Ce sumă ar dona, în aceleași condiții, un grup de 29 de copii?

1 elev $170 : 10 = 17$ (lei)

29 elevi $17 \cdot 29 = 493$ (lei)

Răspuns. 29 de elevi ar dona suma de 493 lei.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Pentru 17 bilete de tramvai s-a plătit suma de 51 de lei.
 - Aflați cât costă un bilet de tramvai.
 - Calculați ce sumă se achită pentru 25 de bilete de același fel.
- Un biciclist parcurge 4 km în 12 minute. Aflați în câte minute va parcurge biciclistul 9 km, știind că se deplasează cu aceeași viteză medie.
- Din 28 de metri de stofă s-au confecționat 14 sacouri de același fel. Aflați câți metri de stofă sunt necesari pentru a confecționa 17 astfel de sacouri.
- Șase camioane transportă o cantitate de marfă făcând nouă transporturi fiecare.
 - Aflați câte transporturi sunt necesare pentru ca aceeași cantitate să fie transportată de un singur camion.
 - Aflați câte transporturi sunt necesare pentru ca aceeași cantitate să fie transportată de nouă camioane.
- Într-o patiserie se fac 75 croasante între orele 7:00 și 10:00. Dacă se menține ritmul de lucru, calculați câte croasante se mai fac până la ora 14:00.
- Șase utilaje agricole ară o suprafață de teren în 15 zile. Aflați în câte zile ar ara cinci astfel de utilaje un teren de aceeași dimensiuni.
- O echipă formată din 12 muncitori poate termina o lucrare în 9 zile, lucrând 8 ore pe zi. Decideți, argumentat, dacă sunt suficiente 6 zile, pentru ca o echipă formată din 27 muncitori, lucrând tot 8 ore pe zi, să termine aceeași lucrare.
- Andrei are de compus și de rezolvat două probleme, ale căror schițe de rezolvare, prin metoda reducerii la unitate, sunt prezentate mai jos. Ajutați-l pe Andrei să formuleze problemele și să le rezolve.

Problema 1	Problema 2
7 robinete ... 9 ore	16 m ... 8 bluze
1 robinet 1 bluză
9 robinete 31 bluze



Minitest

- Alegeți varianta corectă de răspuns.

(30p) a) Dacă 4 kg de mere costă 20 lei, atunci 3 kg mere costă:
A. 18 lei; **B.** 16 lei; **C.** 15 lei; **D.** 14 lei.

(30p) b) Dacă 12 elevi realizează un proiect în 3 ore, atunci 9 elevi vor realiza același proiect în:
A. 4 ore; **B.** 2 ore; **C.** 6 ore; **D.** 8 ore.
- Compuneți și rezolvați o problemă ale cărei date sunt scrise schematic, astfel:
 3 salopete ... 1260 lei
 11 salopete ... x lei

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Metoda comparației



Rezolvăm și observăm

Problema 1. Trei caiete și patru pixuri costă 27 de lei, iar șapte caiete și patru pixuri costă 47 de lei. Aflați cât costă un caiet și cât costă un pix.

Soluție.

3 caiete 4 pixuri 27 lei

7 caiete 4 pixuri 47 lei

Diferența de bani, $47 - 27 = 20$ (lei), provine de la diferența numărului de caiete, adică $7 - 3 = 4$ (caiete). Deducem că 4 caiete costă 20 de lei, deci un caiet costă $20 : 4 = 5$ (lei).

Din enunț, 3 caiete și 4 pixuri costă 27 de lei, deci 4 pixuri costă $27 - 3 \cdot 5 = 12$ (lei).

Atunci, un pix costă $12 : 4 = 3$ (lei).

Răspuns: Un caiet costă 5 lei, iar un pix costă 3 lei.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Metoda comparației se aplică, de regulă, atunci când în problemă apar trei mărimi astfel încât:

- a) pentru fiecare mărime se cunosc câte două valori numerice;
- b) pentru fiecare mărime se cunoaște câte o valoare numerică, iar între două dintre aceste mărimi este dată și o relație.

În ambele situații, metoda constă în prelucrarea și scrierea datelor astfel încât să poată fi *comparate*, în scopul *eliminării* uneia dintre necunoscute.

Problema 2. Aflați cât costă un kilogram de zmeură și cât costă un kilogram de afine, știind că Petra achită pentru 2 kg de zmeură și 2 kg de afine 32 de lei, iar Oana achită pentru 5 kg de zmeură și 4 kg de afine 73 de lei.

Rezolvare: Datele problemei se pot scrie schematic, astfel:

2 kg zmeură 2 kg afine 32 lei (1)

5 kg zmeură 4 kg afine 73 lei

Observăm că nu avem un *termen de comparație*. Ne propunem să obținem aceeași cantitate pentru o categorie (de exemplu, pentru afine). În relația (1), dublând cantitatea de zmeură și cantitatea de afine, se dublează și costul, adică:

4 kg zmeură 4 kg afine $32 \cdot 2 = 64$ (lei).

5 kg zmeură 4 kg afine 73 lei.

Acum, deducem ușor că 1 kg de zmeură costă $73 - 64 = 9$ (lei). Revenind la (1), obținem:

$2 \cdot 9$ lei 2 kg afine 32 lei, deci 2 kg de afine costă $32 - 18 = 14$ (lei), adică 1 kg de afine costă $14 : 2 = 7$ (lei).

Răspuns: Un kilogram de zmeură costă 9 lei, iar un kilogram de afine costă 7 lei.





Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 3. Șase cutii de acuarele și patru seturi de creioane colorate costă 96 de lei. Știind că trei cutii de acuarele costă tot atât cât două seturi de creioane colorate, calculați prețul unei cutii de acuarele și prețul unui set de creioane colorate.

Rezolvare.

6 cutii 4 seturi 96 lei (1)

Se știe că 3 cutii de acuarele costă cât 2 seturi de creioane, deci 6 cutii de acuarele costă cât 4 seturi de creioane. Atunci, 6 cutii de acuarele și 4 seturi de creioane costă cât 8 seturi de creioane.

Deducem că 8 seturi de creioane costă 96 de lei, de unde rezultă că un set de creioane costă $96 : 8 = 12$ (lei).

Revenind la (1), obținem: 6 cutii de acuarele costă $96 - 4 \cdot 12 = 96 - 48 = 48$ (lei), deci prețul unei cutii de acuarele este $48 : 6 = 8$ (lei).

Răspuns: o cutie de acuarele costă 8 lei și prețul unui set de creioane colorate este 12 lei.

Problema 4. Aflați numerele naturale a și b , știind că $a + 6 \cdot b = 135$ și $2 \cdot a + 3 \cdot b = 90$.

Soluție: Din $2 \cdot a + 3 \cdot b = 90$ obținem $2 \cdot (2 \cdot a + 3 \cdot b) = 180$, adică $4 \cdot a + 6 \cdot b = 180$.

Numerele cerute verifică egalitățile:

$$a + 6 \cdot b = 135 \quad (1)$$

$$4 \cdot a + 6 \cdot b = 180 \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2), obținem $3 \cdot a = 45$, deci $a = 15$.

Înlocuind în (1), $15 + 6 \cdot b = 135$, adică $6 \cdot b = 120$ și $b = 20$.

Numerele naturale 15 și 20 verifică datele problemei:

$$15 + 6 \cdot 20 = 15 + 120 = 135 \text{ și } 2 \cdot 15 + 3 \cdot 20 = 30 + 60 = 90.$$

Răspuns: Numerele căutate sunt $a = 15$; $b = 20$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Copiați pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
 - Dacă 5 penare și 4 stilouri costă 110 lei, atunci 10 penare și 8 stilouri costă ...
 - Dacă 2 creioane și 3 rigle costă 7 lei, iar 3 creioane și 4 rigle costă 10 lei, atunci 5 creioane și 7 rigle costă ...
 - Dacă 2 creioane și 3 rigle costă 7 lei, iar 3 creioane și 4 rigle costă 10 lei, atunci un creion și o riglă costă ...
 - Dacă $2a + b = 15$, atunci $4a + 2b = \dots$
 - Dacă $5a + 3b = 24$, iar $7a + 9b = 120$, atunci $12a + 12b = \dots$, iar $a + b = \dots$
- Vlad cumpără trei sticle de apă plată și patru sticle de suc pentru care plătește 25 de lei. Dacă ar fi cumpărat patru sticle de apă plată și patru sticle de suc ar fi plătit 28 de lei. Aflați cât costă o sticlă de apă plată și cât costă o sticlă de suc.



3. Patru ciocolate și patru napolitane cântăresc 1280 grame, iar patru ciocolate și o napolitană de același fel cântăresc 920 grame. Calculați cât cântărește un pachet format din șapte ciocolate și nouă napolitane.



4. La Pensiunea Bumbăcel, se cumpără 4 televizoare și 2 frigidere, pentru care se plătește suma de 26 200 de lei, iar la Pensiunea Brăduț se cumpără 2 televizoare și 6 frigidere, pentru care se plătește suma de 28 420 de lei. Aflați cât costă un televizor și cât costă un frigider, știind că cele două pensiuni au cumpărat televizoare, respectiv frigidere cu același preț.



5. Aflați numerele naturale a și b , știind că $a + 5 \cdot b = 52$ și $2 \cdot a + 7 \cdot b = 77$.
6. Marius și Mihai au împreună 110 lei. După ce Marius își dublează suma de bani, iar Mihai o triplează pe a sa, ei au împreună 255 lei. Aflați ce sumă de bani a avut la început fiecare dintre ei.

7. O piscină este alimentată cu apă prin două robinete. Dacă se lasă deschis primul robinet 2 ore și al doilea 3 ore, în piscină se adună 9720 litri de apă, iar dacă se lasă deschis primul robinet 3 ore și al doilea 2 ore, în bazin se adună 9180 litri de apă. Aflați:

- a) cantitatea de apă, exprimată în litri, care curge prin fiecare robinet într-o oră;
b) cantitatea de apă, exprimată în litri, care curge prin fiecare robinet într-un minut.



8. Aflați două numere, știind că suma dintre triplul primului număr și al doilea este 319, iar suma dintre primul număr și jumătate din al doilea număr este 121.
9. Aflați trei numere naturale, știind că suma a câte două dintre ele este 84, 784, respectiv 854.
10. Compuneți câte o problemă care să se rezolve prin metoda comparației și care să aibă datele următoare:
- a) 3 robinete ... 2 rezervoare ... 10 ore;
6 robinete ... 2 rezervoare ... x ore.
b) 3 robinete ... 2 rezervoare ... 10 ore;
3 robinete ... 4 rezervoare ... x ore.
c) 3 robinete ... 2 rezervoare ... 10 ore;
6 robinete ... 4 rezervoare ... x ore.

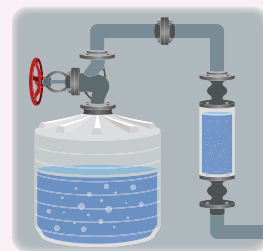


Minitest

Alegeți varianta corectă de răspuns.

Dacă prin 5 robinete curg 150 l de apă în 120 de minute, atunci:

- (30 p) a) Prin 10 robinete de același fel, curg 150 l de apă în:
A. 90 minute; B. 240 minute; C. 24 minute; D. 60 minute.
- (30 p) b) Prin 5 robinete curg în 180 de minute:
A. 200 l; B. 100 l; C. 225 l; D. 250 l.
- (30 p) c) Prin 5 robinete curg 300 l de apă în:
A. 90 minute; B. 240 minute; C. 24 minute; D. 60 minute.



Se acordă 10 puncte din oficiu.



L3 Metoda figurativă



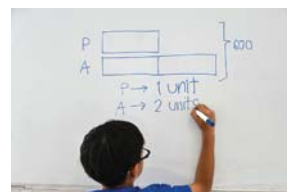
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Metoda figurativă sau *metoda grafică* se recomandă atunci când dependențele între mărimi nu sunt foarte evidente, dar pot fi ilustrate intuitiv prin desene, schițe, grafice, figuri geometrice.

Reprezentarea intuitivă nu este universală, ea diferă de la o problemă la alta, creativitatea rezolvitorului având aici un rol important.



De regulă, se desenează un *segment* sau un dreptunghi care reprezintă valoarea uneia dintre mărimi sau pe unul dintre numerele căutate și care se consideră *unitate*. Celălalt sau celelalte numere se vor reprezenta luând ca *unitate primul segment* și având în vedere *relațiile date* în enunțul problemei.



Cele mai frecvente probleme în care se folosește metoda figurativă, cu reprezentări de segmente, au ca model matematic *afarea a două numere*, în condiții date.

Aplicația 1. Calculați numerele a și b , în fiecare dintre cazurile:

Ipoteză	Desen	Rezolvare
	Considerăm segmentul care reprezintă numărul a ca <i>unitate</i> .	
1. Se cunosc <i>suma și diferența</i> numerelor: $a + b = s; b - a = d$		$s - d = 2 \cdot a$ (două unități); $a = (2 \cdot a) : 2;$ $b = a + d.$
2. Se cunosc <i>suma și cântul</i> numerelor: $a + b = s; b : a = c, a \neq 0$		$a = s : (c + 1);$ $b = a \cdot c.$
3. Se cunosc <i>diferența și cântul</i> numerelor: $b - a = d; b : a = c, a \neq 0$		$a = d : (c - 1);$ $b = a \cdot c.$

Observație. Pentru a nu încărca figura, nu vom scrie de fiecare dată pe desen care este segmentul *unitate*, dar vom preciza acest fapt în rezolvare.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Metoda figurativă se folosește în multe alte situații sau poate fi și o *parte*, o *secvență* a rezolvării prin alte metode aritmetice, având rolul de a ușura raționamentul și de a accelera rezolvarea.

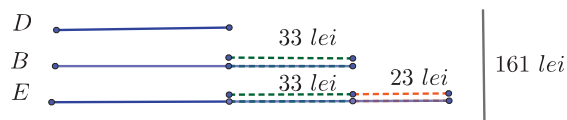
Problema 1. Barbu, Dragoș și Eugen au împreună 161 de lei.

Barbu are cu 33 de lei mai mulți decât Dragoș și cu 23 de lei mai puțini decât Eugen.

Aflați câți lei are fiecare.

Soluție: Observăm că Dragoș este cel care are cea mai mică sumă de bani.

Reprezentăm această sumă printr-un segment pe care îl considerăm *unitate*.



Suma de bani pe care o are Barbu este reprezentată printr-un segment format dintr-o *unitate* și încă 33 de lei, iar suma de bani pe care o are Eugen este reprezentată printr-un segment format dintr-o *unitate* și încă $33 + 23 = 56$ (lei).

Împreună, cei trei copii au 161 de lei, reprezentați de trei *unități* și $33 + 33 + 23 = 89$ (lei).

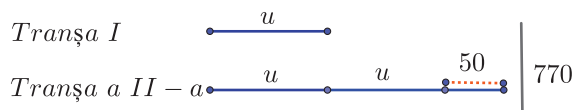
Cele trei *unități* reprezintă $161 - 89 = 72$ (lei)

O *unitate* reprezintă $72 : 3 = 24$ (lei), adică Dragoș are 24 de lei.

Atunci, Barbu are $24 + 33 = 57$ (lei), iar Eugen are $57 + 23 = 80$ (lei).

Răspuns. Dragoș are 24 de lei, Barbu are 57 de lei și Eugen are 80 de lei.

Problema 2. Mihai i-a împrumutat surorii lui, Alexandra, suma de 770 lei, în două tranșe. Știind că suma de bani din a doua tranșă este cu 50 de lei mai mare decât dublul sumei din prima tranșă, aflați sumele de bani primite de Alexandra în fiecare din cele două tranșe.



Soluție: Reprezentăm numărul cel mai mic, adică numărul care reprezintă suma de bani oferită de Mihai în prima tranșă printr-un *segment* pe care îl considerăm *unitate*.

Suma primită în a doua tranșă este reprezentată printr-un segment format din *două unități* și încă 50 de lei, iar suma totală reprezintă *trei unități* și încă 50 de lei.

Cele *trei unități* reprezintă $770 - 50 = 720$ (lei), iar suma primită în prima tranșă este $720 : 3 = 240$ (lei).

Răspuns. Alexandra a primit 240 lei în prima tranșă și $240 \cdot 2 + 50 = 480 + 50 = 530$ (lei), în a doua tranșă.



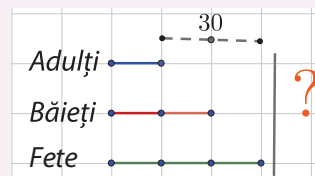
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Suma a două numere naturale este 490. Aflați numerele, știind că unul dintre numere este cu 94 mai mare decât celălalt.
- Din cei 200 de lei pe care îi are, Petra cumpără o revistă, o carte care costă de cinci ori mai mult decât revista și mai rămâne cu 86 de lei. Aflați prețul revistei și prețul cărții.
- Elena a cumpărat cu 97 euro, un fular pentru tatăl ei și o eșarfă pentru mama sa. Știind că eșarfa mamei a costat cu 5 euro mai mult decât fularul tatălui, aflați prețul pentru fiecare din obiectele cumpărate.
- Cristian și Mihai sunt frați. Suma vârstelor celor doi este 22 de ani. Când Mihai avea 4 ani, Cristian avea 6 ani. Aflați ce vârstă are acum fiecare dintre cei doi frați.
- Aflați lungimea și lățimea unui dreptunghi, știind că are perimetrul 240 cm, iar lățimea dreptunghiului este cu 34 cm mai mică decât lungimea acestuia.
- Suma a două numere este 908. Împărțind un număr la celălalt, se obține câtul 3 și restul 100. Aflați diferența numerelor.
- Suma a două numere este 1101. Împărțind un număr la celălalt se obține câtul 8 și restul cu 9 mai mic decât împărțitorul. Determinați suma resturilor împărțirii celor două numere la 11.
- În acest an, 54 378 persoane au vizitat Muzeul Satului din București. Vizitatorii au fost de două ori mai puțini adulți decât studenți și cu 126 copii mai mulți decât adulți. Aflați numărul copiilor care au vizitat Muzeul Satului.



Minitest

- (30 p) 1. Aflați, folosind metoda figurativă, numerele naturale m și n , știind că $m + n = 120$ și $m - n = 30$.
- (30 p) 2. a) Compuneți o problemă ale cărei date pot fi reprezentate ca în imaginea alăturată.
- (30 p) b) Rezolvați problema pe care ați compus-o.



Se acordă 10 puncte din oficiu.



L4 Metoda mersului invers



Rezolvăm și observăm

Sofia îi spune Soniei:

— Mă gândesc la un număr. *Adun* numărul cu 2^3 , *scad* din rezultat 7, apoi *înmulțesc* totul cu 3 și obțin numărul 9. La ce număr m-am gândit?

Sonia, ia un creion și calculează: $9 : 3 = 3$; $3 + 7 = 10$; $10 - 2^3 = 10 - 8 = 2$, apoi răspunde:

— *Te-ai gândit la numărul 2.*

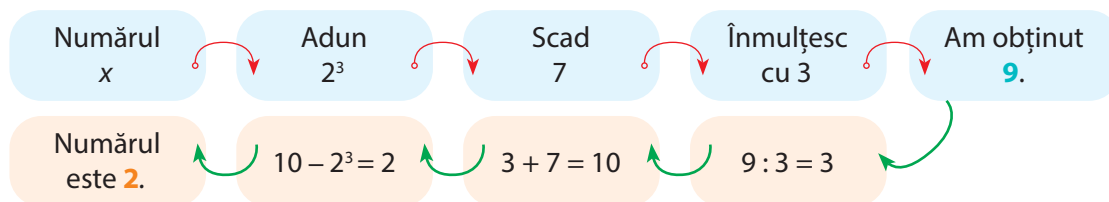
a) Decideți dacă Sonia a răspuns corect, urmărind operațiile pe care le efectuează și ordinea în care le scrie.

b) Scrieți datele problemei sub formă de exercițiu și rezolvați problema, parcurgând operațiile în ordine inversă.

Soluție. a) Pornind de la numărul 2 și efectuând operațiile enumerate de Sofia, obținem rezultatul 9, deci Sonia are dreptate.

Observație. Sonia efectuează operațiile corespunzătoare probei operațiilor pe care le efectuează Sofia, în ordine inversă.

De exemplu, prima operație a Sofiei a fost adunarea numărului 8, iar ultima operație a Soniei a fost scăderea numărului 8.



b) $[(x + 2^3) - 7] \cdot 3 = 9$. Atunci, $(x + 2^3) - 7 = 9 : 3$; $(x + 2^3) - 7 = 3$;
 $x + 2^3 = 3 + 7$; $x + 2^3 = 10$; $x = 10 - 2^3$, adică $x = 2$.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problemele care necesită rezolvare prin metoda mersului invers sunt formulate ca o succesiune de mai multe operații, probleme simple, iar efectuarea calculelor și realizarea raționamentelor în ordinea firească este dificilă și oboseitoare.

În consecință, vom folosi datele problemei pentru a o descompune în mai multe probleme simple pe care le vom rezolva în ordinea inversă a prezentării.

- Se pornește de la ultima relație cunoscută, raportând-o la cea anterioară (penultima).
- Rezultatul obținut se raportează la antepenultima relație.
- Se continuă procedeul până când ajungem la prima relație din enunțul problemei, cu ajutorul căreia găsim necunoscuta.





Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă problema este simplă, o scriem sub formă de exercițiu, apoi aflăm necunoscuta, folosind proba operațiilor care apar în exercițiu, în ordinea inversă enunțului.

Problema 1. La un concurs sportiv pentru copii, Natalia a primit o diplomă și un premiu în bani. Din acești bani și-a cumpărat două cărți a câte 15 lei fiecare și un cadou pentru părinți, în valoare de 70 de lei. Părinții adaugă la suma rămasă, o sumă de bani egală cu dublul acesteia. Natalia constată că are acum 1200 de lei, exact suma de care avea nevoie pentru următoarea deplasare. Aflați suma de bani pe care a primit-o Natalia ca premiu.

Soluție. Considerând x suma de bani primită, atunci
 $(x - 2 \cdot 15 - 70) \cdot 3 = 1200$.

Obținem succesiv relațiile: $x - 2 \cdot 15 - 70 = 1200 : 3$;

$$x - 2 \cdot 15 - 70 = 400;$$

$$x - 2 \cdot 15 = 400 + 70;$$

$$x - 2 \cdot 15 = 470;$$

$$x = 470 + 2 \cdot 15;$$

$$x = 470 + 30;$$

$$x = 500.$$



Răspuns. Natalia a primit suma de 500 lei.

Dacă problema este mai dificilă, eventual are două sau mai multe necunoscute, în raționamentul prin metoda mersului invers ne putem folosi de desene, scheme, deci facem apel și la *metoda figurativă*.

Problema 2. Bunica le oferă nepoților piersici într-un coș și invită cei trei nepoți să-și ia câte piersici doresc. Alexandra, a luat jumătate din piersici, apoi Adriana a luat jumătate din piersicile rămase și la final, a luat și Cristian jumătate din ce mai era în coș. Bunica a observat că în coș au mai rămas 3 piersici.

Aflați numărul piersicilor luate de fiecare copil și numărul piersicilor care erau inițial în coș;



Soluție. Cristian a luat jumătate din ce a rămas după cele două surori, deci cealaltă jumătate a rămas în coș, adică înainte ca acesta să ia piersici, în coș erau $3 \cdot 2 = 6$ (piersici).

Cu același raționament, înainte să ia Adriana piersici, erau $6 \cdot 2 = 12$ (piersici), iar la început erau $12 \cdot 2 = 24$ (piersici). Cei trei au luat, în ordine, 12, 6 respectiv 3 piersici.

Răspuns. Cristian a luat 3 piersici, Adriana a luat 6 piersici, Alexandra a luat 12 piersici. În coș au fost 24 de piersici.

Observație. Cu o reprezentare grafică, rezolvarea prin *metoda mersului invers* este foarte avantajoasă. Se consideră ca *unitate* segmentul corespunzător celor 3 piersici rămase în coș. Lui Cristian îi corespunde o *unitate*, deci 3 piersici, Adrianei îi corespund 2 *unități*, adică 6 piersici, iar Alexandrei îi corespund 4 *unități*, adică 12 piersici.



Se observă foarte simplu că în coș au fost inițial piersici corespunzătoare unui număr de 8 *unități*, fiecare reprezentând 3 piersici, deci au fost $8 \cdot 3 = 24$ (piersici).





Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Tania primește de la bunica sa o sumă de bani. După ce cheltuiește jumătate din această sumă și încă 20 de lei, Tania rămâne cu 40 de lei. Aflați suma pe care a primit-o Tania de la bunica sa.




2. Un excursionist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi parcurge jumătate din distanță, a doua zi o jumătate din distanța rămasă, iar în a treia zi, ultimii 18 km. Aflați lungimea întregului traseu.



3. După încheierea cursurilor, autobuzul școlii duce un număr de elevi acasă. La prima stație coboară 2 elevi, la următoarea stație coboară jumătate din cei rămași, iar la a treia stație coboară ultimii 9 elevi. Aflați numărul elevilor care au fost transportați acasă cu autobuzul școlii.

4. Andreea are de rezolvat pe parcursul unei săptămâni un număr de probleme de matematică. Luni a rezolvat un sfert dintre ele, marți o treime din restul problemelor, miercuri are zi liberă, joi rezolvă jumătate din numărul problemelor rămase și constată că mai are de rezolvat 12 probleme. Aflați numărul total de probleme pe care trebuie să le rezolve Andreea.

5. Aflați numărul x din egalitatea: 
 $9 + 8 \cdot \{7 + 6 \cdot [5 + 4 \cdot (3 + x)]\} = 20\ 081.$

6. Am ales un număr, l-am înmulțit cu 3, la rezultat am adunat 5, suma obținută am împărțit-o la 7, iar din câtul împărțirii (exacte) am scăzut 9, obținând numărul 11. Determinați numărul ales.

7. Aflați numărul natural x din egalitățile:

- a) $21 - 2 \cdot (7 + x : 3) = 1;$
 b) $100 - 2 \cdot (7 + 84 : x) = 2;$
 c) $[2 \cdot (7 + x : 3) + 9] : 5 - 5 = 0;$
 d) $[(3000 - x) : 3 + 74] : 100 = 4.$



Minitest

- (30 p) 1. Adunând un număr cu dublul său, se obține 42. Numărul este:
 A. 14; B. 12; C. 6; D. 11.
2. Marian s-a gândit la un număr. A înmulțit cu 7 suma dintre acesta și pătratul lui 5, apoi a scăzut pătratul numărului 4 și a împărțit rezultatul la 2. Astfel, a obținut numărul 90.
- (30 p) a) Datele problemei se scriu sub formă de exercițiu:
 A. $[(x + 25 \cdot 7) - 16] : 2 = 90;$ B. $(x + 25) \cdot 7 - 16 : 2 = 90;$
 C. $[(x + 25) \cdot 7 - 16] : 2 = 90;$ D. $(x + 25 \cdot 7 - 16) : 2 = 90.$
- (30 p) b) Numărul la care s-a gândit Marian este:
 A. 4; B. 3; C. 6; D. 2.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L5 Metoda falsei ipoteze



Rezolvăm și observăm

Problema 1. La un spectacol, s-au vândut 620 de bilete la prețul de 20 lei respectiv de 25 lei, încasându-se în total 14 500 lei. Aflați câte bilete de fiecare fel au fost vândute.

Soluție: Presupunem că s-au vândut numai bilete cu prețul de 20 de lei. Suma încasată ar fi fost: $620 \cdot 20 = 12\,400$ (lei), mai puțin cu $14\,500 - 12\,400 = 2\,100$ (lei) decât suma reală.

Diferența provine din faptul că s-au vândut și bilete de 25 de lei, achitându-se pentru fiecare dintre acestea, în plus $25 - 20 = 5$ (lei).

Numărul biletelor pentru care s-a plătit cu 5 lei mai mult, adică a celor de 25 de lei este $2\,100 : 5 = 420$.

S-au vândut 420 de bilete cu 25 lei și $620 - 420 = 200$ de bilete cu 20 de lei.

Verificare: Numărul biletelor: $200 + 420 = 620$.

Suma obținută: $200 \cdot 20 + 420 \cdot 25 = 4\,000 + 10\,500 = 14\,500$ (lei).

Răspuns. S-au vândut 420 de bilete cu 25 de lei și 200 de bilete cu 20 de lei.




Metoda falsei ipoteze se folosește atunci când datele problemei se referă la mărimi corelate, asupra cărora se pot formula ipoteze arbitrare.

Aceasta constă în rezolvarea unei probleme obținute prin adăugarea uneia sau mai multor ipoteze și compararea rezultatelor obținute cu cele din enunț. Observând nepotrivirile apărute, se trag concluzii, se valorifică rezultatele care ne conduc la rezultatul corect.

Problema 2. În 28 de recipiente pline, unele cu capacitatea de 5 l, altele cu capacitatea de 7 l, sunt 180 l de apă. Calculați numărul recipientelor de fiecare fel.

Soluție: Rescriem datele problemei evidențiind ipoteza și cerințele.

Ipoteze (ce cunoaștem)	Cerințe
I_1 Sunt, în total, 28 de recipiente.	C_1 Numărul recipientelor de 5 l; C_2 Numărul recipientelor de 7 l;
I_2 Recipientele sunt de 5 l și de 7 l.	
I_3 În cele 28 de recipiente sunt 180 l de apă.	

Scriem rezolvarea problemei, evidențiind etapele pe care le parcurgem.

Etapa	Descriere și interpretare	Calcul și concluzie
Adăugăm ipoteza: Presupunem că toate recipientele ar avea capacitatea de 7 litri.	Dacă toate recipientele ar avea capacitatea de 7 litri, atunci în cele 28 de recipiente ar fi $28 \cdot 7$ litri.	$28 \cdot 7 = 196$ (litri) $196 \neq 180$, deci ipoteza adăugată de noi este falsă.
Calculăm și interpretăm diferența între rezultatul obținut la etapa anterioară și cantitatea din enunț.	Diferența dintre rezultatul obținut și cantitatea totală de apă ne arată că există și recipiente de 5 litri.	$196 - 180 = 16$ (litri). Cum $7 - 5 = 2$ (litri), rezultă că surplusul de 16 l de apă reprezintă câte 2 l de apă, apărut în condițiile ipotezei false, la fiecare recipient de 5 litri.
Calculăm numărul recipientelor de 5 l, folosind rezultatele din etapa anterioară.	Numărul recipientelor de 5 litri este câtul împărțirii $16 : 2$	În concluzie, avem 8 recipiente de 5 litri. Cum, în total sunt 28 de recipiente, obținem $28 - 8 = 20$ recipiente de 7 litri.

Verificare: $20 \cdot 7 + 8 \cdot 5 = 140 + 40 = 180$ (litri).

Răspuns. 8 recipiente de 5 litri și 20 de recipiente de 7 litri.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problema 3. Un grup de elevi participă la o activitate în centrul de documentare al școlii. Dacă în fiecare bancă se vor așeza câte doi elevi, atunci cinci elevi nu vor avea loc. Dacă în fiecare bancă se vor așeza câte trei elevi, atunci trei bănci vor rămâne neocupate. Aflați numărul elevilor participanți și numărul băncilor din centrul de documentare.



Rezolvare:

Vom rezolva problema prin metoda falsei ipoteze, în două moduri.

I. Presupunem că elevii sunt așezați câte 2 în bancă. Atunci, sunt ocupate toate băncile și mai sunt în picioare 5 elevi.

Eliberăm 3 bănci, adică se vor ridica în picioare 6 elevi. Acum avem de distribuit cei $6 + 5 = 11$ (elevi) în băncile în care sunt deja câte 2 elevi. Fiecare se va așeza în câte o bancă, deci s-au ocupat 11 bănci cu câte 3 elevi și au mai rămas libere 3 bănci.

Am obținut $11 + 3 = 14$ (bănci) și $11 \times 3 = 33$ elevi.

II. Vom rescrie datele problemei, evidențiind ipoteza.

Ipoteză (ce cunoaștem)	Cerințe
I_1 Dacă elevii stau câte 2, atunci rămân 5 elevi în picioare.	C_1 Aflați numărul elevilor.
I_2 Dacă elevii stau câte 3, atunci 3 bănci rămân libere.	C_2 Aflați numărul băncilor.

Etapa	Descriere și interpretare	Calcul și concluzie
<i>Adăugăm ipoteza:</i> Presupunem că în sală sunt 9 bănci.	Câte 2 în bancă, ar participa $9 \cdot 2 + 5$ elevi, iar câte 3 în bancă, ar participa $(9 - 3) \cdot 3$ elevi.	$9 \cdot 2 + 5 = 23$ (elevi) $(9 - 3) \cdot 3 = 18$ (elevi).
<i>Comparăm rezultatele obținute</i>	2 elevi în bancă \rightarrow 23 elevi; 3 elevi în bancă \rightarrow 18 elevi	$23 - 18 = 5$ (elevi) Cele două rezultate sunt diferite. Adăugăm altă ipoteză
<i>Adăugăm ipoteza:</i> Presupunem că în sală sunt 10 bănci.	Dacă elevii ar sta câte 2 în bancă, ar participa $10 \cdot 2 + 5$ elevi, iar dacă ar sta câte 3 în bancă, ar participa $(10 - 3) \cdot 3$ elevi.	$10 \cdot 2 + 5 = 25$ (elevi) $(10 - 3) \cdot 3 = 21$ elevi.
<i>Comparăm rezultatele obținute</i>	2 elevi în bancă \rightarrow 25 elevi; 3 elevi în bancă \rightarrow 21 elevi	$25 - 21 = 4$ (elevi) Mărind numărul băncilor cu 1, diferența între rezultate se micșorează cu 1.
<i>Calculăm numărul băncilor astfel ca diferența între rezultate să fie 0.</i>	Mărim <i>numărul băncilor</i> , pornind de la prima presupunere, cu $5 : 1 = 5$.	Numărul băncilor este: $9 + 5 = 14$ (bănci).
<i>Calculăm numărul elevilor</i>	$14 \cdot 2 + 5 = 33$ (elevi); Verificare: $(14 - 3) \cdot 3 = 33$ (elevi)	Răspuns. Sunt 14 bănci și 33 de elevi.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Horia a achitat costul unei excursii cu 29 de bancnote, unele de 10 lei, altele de 50 de lei. Aflați numărul bancnotelor de fiecare fel pe care le-a folosit Horia, știind că excursia a costat 730 de lei.
- La un centru de colectare a laptelui s-au adus 1000 de litri de lapte, cantitate care a fost pusă în 182 de bidoane, unele de 5 litri, altele de 8 litri. Determinați numărul bidoanelor de fiecare fel folosite.



3. La un meci de baschet s-au vândut 1075 de bilete, la prețul de 20 de lei și respectiv 25 de lei biletul, încasându-se 23045 de lei. Aflați câte bilete de fiecare fel au fost vândute.
4. În centrul de documentare al unei școli sunt 25 de mese de două locuri și de trei locuri. Se știe că atunci când jumătate din locuri sunt ocupate, în centrul de documentare pot studia 28 de elevi. Aflați numărul meselor de două locuri din centrul de documentare.
5. Pentru împrejmuirea unui teren cu gard, s-au folosit 360 de panouri dreptunghiulare, unele cu lungimea de 75 cm, altele cu lungimea de 50 cm. Știind că lungimea gardului este 216 m, aflați numărul de panouri de fiecare fel.
6. La un concurs, elevii au avut de rezolvat 20 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru o problemă nerezolvată sau pentru un răspuns greșit se scad 2 puncte. Aflați numărul răspunsurilor corecte date de un elev care a obținut 86 de puncte.
7. Pentru un concert, s-au vândut 415 bilete cu prețul de 12 lei respectiv cu prețul de 18 lei, încasându-se în total 6480 de lei. Aflați numărul biletelor vândute cu prețul de 18 lei.
8. La ora de desen, cei 24 de elevi ai unei clase folosesc cutii cu creioane colorate cu 6 creioane și cu 8 creioane, fiecare elev o singură cutie. Știind că în total sunt 160 de creioane, aflați câte cutii de fiecare fel au fost folosite.
9. Într-o curte, Alin vede găini și iepuri. El a numărat 18 capete și 44 picioare. Aflați câte găini și câți iepuri erau în acea curte.
10. Un fermier vinde la piață 80 de kilograme de fructe; mere și pere. Merele se vând cu 4 lei kilogramul, iar perele cu 7 lei kilogramul. Știind că pe 70 de kg de fructe vândute a încasat 370 de lei, aflați:
 - a) suma maximă pe care o putea încasa pe toată marfa;
 - b) suma minimă pe care o putea încasa fermierul pe toată marfa.
11. La un centru sportiv cele 120 de mingi din dotare sunt puse în cutii: câte 2 mingi în cutie sau câte 5 mingi într-o cutie, în total 33 de cutii. Aflați în câte cutii sunt 5 mingi.



Minitest

1. În blocul în care locuiește Corina sunt 24 apartamente cu 3 și cu 4 camere. Se știe că, în total, sunt 82 de camere.
 - (20 p) a) Aflați câte camere ar fi în bloc, dacă toate apartamentele ar avea 3 camere.
 - (20 p) b) Aflați câte camere ar fi în bloc dacă toate apartamentele ar avea 4 camere.
 - (20 p) c) Calculați câte apartamente au 3 camere și câte au 4 camere în blocul în care locuiește Corina.
- (30 p) 2. Laurențiu a achitat cu 29 de bancnote, unele de 5 lei, altele de 100 de lei, costul unei excursii, de 1760 de lei. Aflați numărul bancnotelor de 5 lei și numărul bancnotelor de 100 de lei cu care acesta a plătit excursia.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Pe foaia de test, completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

- (10p) 1. Dacă pentru 3 litri de lapte plătim 18 lei, atunci pentru 5 litri de lapte vom plăti ... lei.
- (10p) 2. Adunând un număr natural cu triplul său se obține 208. Numărul este

II. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete

- (20p) 1. Adrian, Andrei și Alina au împreună 743 de lei. După ce fiecare cheltuie aceeași sumă, Adrian rămâne cu 250 de lei, Andrei rămâne cu 194 de lei, iar Alina rămâne cu 170 de lei. Aflați ce sumă a avut fiecare, la început.
- (20 p) 2. În 75 de lădițe se pun 840 kg de mere, în unele lăzi câte 10 kg, în celelalte câte 12 kg. Aflați numărul lăzilor în care s-au pus câte 12 kg de mere.
- (20p) 3. Într-o clasă sunt de două ori mai multe fete decât băieți. Dacă ar pleca 3 fete și ar veni 5 băieți atunci numărul fetelor ar fi egal cu numărul băieților. Aflați câte fete și câți băieți sunt în clasă.

III. Compuneți o problemă, folosind scrierea schematică a datelor:

10 copii 12 adulți 134 de lei
 6 copii 12 adulți 114 lei

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L1 Divizor al unui număr natural. Multiplu al unui număr natural



Rezolvăm și observăm



Problemă. Darius și-a ajutat bunicul să recolteze merele. La sfârșitul zilei de lucru, bunicul spune:

— Mai sunt aici 210 mere pe care vreau să le punem în lădițe de același fel. Găsești în magazie lădițe de două tipuri. În unele încap exact 35 de mere, iar în celelalte încap exact 50 de mere. Apoi, adaugă:

— Ai două lucruri de făcut:

- a) să alegi lădițele astfel încât să fie de același tip și să putem repartiza toate merele, lădițele fiind pline.
b) să calculezi numărul lădițelor pe care le vom folosi.

Să descoperim răspunsul pe care Darius ar trebui să-l dea bunicului său.

Soluție. a) Ne ocupăm, pe rând, de cele două tipuri de lădițe.

1. Am putea grupa cele 210 mere câte 35, dacă există un număr natural c astfel încât $210 = 35 \cdot c$. Restul împărțirii numărului 210 la 35 este 0, iar câtul împărțirii este 6, adică $210 = 35 \cdot 6$, deci merele pot fi grupate în lădițe de câte 35 de mere.

Vom spune că 35 este *divizor* al numărului 210, sau că 210 este *multiplu* al numărului 35.

2. Am putea grupa cele 210 mere câte 50, dacă există un număr natural n astfel încât $210 = 50 \cdot n$. Restul împărțirii numărului 210 la 50 este 10, iar câtul împărțirii este 4, adică $210 = 50 \cdot 4 + 10$, deci *nu se pot forma grupe* de câte exact 50 de mere.

Vom spune că 50 *nu este divizor* al numărului 210, sau că 210 *nu este multiplu* al numărului 50.

b) Se pot folosi 6 lădițe de câte 35 de mere.

Observație. Din $210 = 35 \cdot 6$ rezultă că 6 este *divizor* al lui 210, iar 210 este *multiplu* al numărului 6.

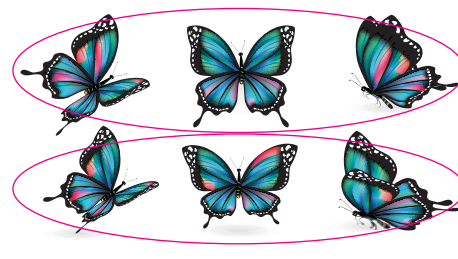
Numărul natural a se divide la (este divizibil cu) numărul natural b dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Numărul a din relația de mai sus se numește *multiplu* al numărului b , iar b se numește *divizor* al numărului a .

Exemple. Pentru că $6 = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$, rezultă:

6 se divide la 2;
6 este multiplu al numărului 2;

6 se divide la 3;
6 este multiplu al numărului 3;
3 este divizor al numărului 6.



Observație. 0 nu este divizor al niciunui număr natural nenul.

Un număr divizibil cu 2 se numește *număr par*.

Un număr care nu este divizibil cu 2 se numește *număr impar*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru a preciza că numărul a este divizibil sau că nu este divizibil cu numărul b , notăm și citim astfel:

Cum scriem	Cum citim	Ce semnificație are
$a:b$	a se divide la b sau a este divizibil cu b	Numărul a este <i>multiplu</i> al numărului b .
$b a$	b divide a	Numărul b este <i>divizor</i> al numărului a .
$a \nmid b$	a nu se divide la b sau a nu este divizibil cu b	Numărul a <i>nu este multiplu</i> al numărului b .
$b \nmid a$	b nu divide a	Numărul b <i>nu este divizor</i> al numărului a .



Reținem

- Numărul natural 0 este multiplu al oricărui număr natural.
 $0 : a$, oricare ar fi numărul natural a . ($0 = a \cdot 0$)
- Numărul natural 1 este divizor al oricărui număr natural.
 $a : 1$, oricare ar fi numărul natural a . ($a = 1 \cdot a$)
- Dacă $a \neq 0$, atunci $a \nmid 0$ (0 nu este divizor al niciunui număr natural nenul).
- Dacă $a = b \cdot c$, atunci a este multiplu atât al numărului b cât și al numărului c , iar b și c sunt divizori ai numărului a .

În practică, sunt foarte utile următoarele proprietăți ale relației de divizibilitate.

Proprietatea	Exemple
$a a$ oricare ar fi numărul natural a .	$3 3$ pentru că $3 = 1 \cdot 3$; $20 20$ pentru că $20 = 1 \cdot 20$ $1 1$ pentru că $1 = 1 \cdot 1$; $0 0$ pentru că $0 = n \cdot 0$, n număr natural
Dacă a și b sunt numere naturale cu $a b$ și $b a$, atunci $a = b$.	Din $7 b$ și $b 7$ rezultă $b = 7$. Din $a 23$ și $23 a$ rezultă $a = 23$.
Dacă a și b sunt numere naturale cu $a b$ și $b c$, atunci $a c$.	Din $5 25$ și $25 600$ rezultă $5 600$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1. Demonstrați că :

- suma a două numere pare este un număr par;
- produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

Soluție. a) Fie a și b numere naturale pare.

Atunci, $a:2$ și $b:2$, adică găsim numerele c și d astfel ca $a = 2 \cdot c$ și $b = 2 \cdot d$.

Suma celor două numere este $a + b = 2 \cdot c + 2 \cdot d$.

Dăm factor comun numărul 2 și obținem $a + b = 2 \cdot (c + d)$, adică $(a + b):2$, de unde $(a + b)$ este *număr par*.

b) Fie a și $a + 1$ numere naturale consecutive. Cele două numere vor da resturi diferite prin împărțire la 2. Cum restul împărțirii la 2 este una din cifrele 0 sau 1, atunci, în mod sigur, unul dintre cele două numere dă restul 0 prin împărțire la 2, deci este divizibil cu 2, adică este număr par. Sunt posibile situațiile:

- Dacă a este par, atunci $a = 2 \cdot c$ și $a + 1 = 2 \cdot c + 1$, adică $a(a + 1) = 2 \cdot c \cdot (2 \cdot c + 1)$, care se mai poate scrie $a \cdot (a + 1) = 2 \cdot [c \cdot (2 \cdot c + 1)]$, de unde rezultă că produsului $a \cdot (a + 1)$ este divizibil la 2, deci este număr par.
- Dacă $a + 1$ este număr par, raționăm în mod asemănător. În acest caz $a + 1 = 2 \cdot c$, iar $a = 2 \cdot c - 1$. Obținem $a \cdot (a + 1) = (2 \cdot c - 1) \cdot (2 \cdot c) = (2 \cdot c - 1) \cdot (c \cdot 2) = [(2 \cdot c - 1) \cdot c] \cdot 2$, adică $a \cdot (a + 1)$ este număr par.

Aplicația 2.

a) Demonstrați că toate numerele naturale de forma \overline{abab} sunt divizibile cu 101.

b) Identificați un divizor de două cifre al numărului \overline{abab} .

Soluție. a) Numerele de forma \overline{abab} se scriu $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 10^2 + \overline{ab}$, adică $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot (10^2 + 1)$, de unde $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$. În concluzie, $101 \mid \overline{abab}$, oricare ar fi cifrele a și b .

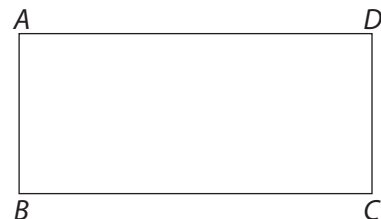
b) Din $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot (10^2 + 1)$, rezultă că \overline{ab} este divizor de două cifre al numărului \overline{abab} .



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Numărul 108 este divizibil cu numărul:
A. 10; B. 9; C. 8; D. 7.
 - Numărul 13 divide numărul:
A. 32; B. 42; C. 52; D. 102.
- Copiați pe caiete, apoi completați spațiile punctate cu una dintre expresiile: *este divizibil/nu este divizibil, divide/nu divide*, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
 - Numărul 30 ... cu numărul 6.
 - Numărul 102 ... cu numărul 8.
 - Numărul 20 ... numărul 60.
 - Numărul 24 ... numărul 46.
- Copiați pe caiete, apoi completați cu una dintre expresiile: *este divizor, nu este divizor, este multiplu, nu este multiplu*, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.
 - Numărul 9 ... al numărului 54.
 - Numărul 35 ... al numărului 7.
 - Numărul 6 ... al numărului 44.
 - Numărul 120 ... al numărului 50.
- Scrieți numerele naturale de două cifre, divizibile cu 15.

15
- Determinați numerele naturale cuprinse între 40 și 100, care se divid la 18.
- Scrieți:
 - multiplii numărului 8, mai mici decât 42;
 - multiplii numărului 5, cuprinși între 55 și 77;
 - multiplii numărului 75, cuprinși între 400 și 615.
- Numărul n este multiplu al numărului 9. Determinați valorile lui n pentru care $5 \cdot n < 160$.
- Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
„Numărul 28 este multiplu al numărului 4 și divizor al numărului 336”.
Justificați răspunsul dat.
- Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
 - $209 \div (2 + 3^2)$;
 - $27 \mid (3^5 + 3^3 + 3^0)$;
 - $175 \nmid 7$;
 - $15 \nmid 100$;
 - \overline{ab} este divizor al numărului $\overline{ab0ab}$;
 - \overline{cdc} este multiplu al lui 11.
- Scrieți divizorii numărului 32.
 - Determinați numerele naturale n pentru care $(3 \cdot n - 1)$ divide numărul 32.
- Un dreptunghi are perimetrul 60 cm, iar lungimea și lățimea sunt exprimate în centimetri, prin numere naturale divizibile cu 10. Aflați lungimea și lățimea dreptunghiului.



12. Arătați că:

a) suma a două numere impare este un număr par;



b) suma dintre un număr par și un număr impar nu este divizibilă cu 2.



13. Demonstrați că oricare ar fi cifra x , numărul $A = 4x4 + 30x$ este divizibil cu 11.

14. Alegeți, dintre numerele

18, 23, 60, 48, 84

pe cele care sunt divizibile cu 6.

15. Alegeți, dintre numerele

14, 23, 63, 56, 84,

pe cele care sunt divizibile cu 7.

16. Se consideră numărul

$A = 1 + 2 + 3 + \dots + 107$.

Arătați că numărul A este divizibil cu 18.

17. Scrieți primii 8 multipli ai lui 23.

18. Scrieți multiplii mai mici decât 40 ai numerelor;

a) 3; b) 4; c) 6.

Alegeți, dintre numerele găsite, pe cele care se repetă în cele trei situații.

19. a) Scrieți divizorii lui 48.

b) Scrieți multiplii de două cifre ai lui 6.

c) Subliniați numerele care se repetă la subpunctele anterioare.

20. Maria și Alex au scris, fiecare, numerele de la 1

la 50. Apoi, Maria a

subliniat cu albastru

numerele care sunt

multiplu de 3, iar

Alex a subliniat cu

verde numerele care

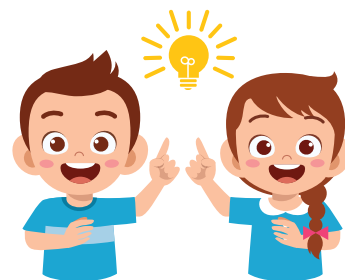
erau multiplu de 4.

Decideți justificat,

care dintre cei doi

copii a subliniat mai

multe numere.



Minitest

(15p) 1. a) Copiați tabelul pe caiete, apoi completați în caseta liberă litera A, dacă propoziția este adevărată sau litera F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Dacă un număr natural este divizibil cu 12, atunci el este divizibil cu 6.	
p_2 : Dacă un număr natural este divizibil cu 3, atunci el este divizibil cu 9.	
p_3 : Dacă un număr natural este divizibil cu 5, atunci și triplul său este divizibil cu 5.	

(15p) b) Justificați pentru fiecare caz răspunsul dat la subpunctul a).

(15p) 2. a) Scrieți valorile numărului natural a , știind că $a|96$ și că $a > 30$.

(15p) b) Scrieți valorile numărului natural b , știind că $b : 13$ și că $b < 50$.

3. Fie $n = 729 : 3^4 + 2 \cdot (10^2 - 1)$.

(15p) a) Efectuați calculele necesare și scrieți divizorii numărului n .

(15p) b) Demonstrați că n este multiplu al numărului 23.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Divizor comun. Multiplu comun



Rezolvăm și observăm

Problema 1. De ziua fratelui lor mai mic, Diana și Alex decorează curtea cu buchete de baloane colorate.

Ei au cumpărat 8 baloane roșii, 12 baloane mov, 16 baloane galbene, 20 de baloane verzi.

- Aflați numărul de buchete care se pot forma astfel încât să fie folosite toate baloanele, iar buchetele să fie formate din același număr de baloane, de aceeași culoare, cel puțin un balon de fiecare culoare în fiecare buchet.
- Precizați numărul baloanelor pe care le conține un buchet, în fiecare caz.



Soluție. a) Numărul 8 are divizorii: 1; 2; 4; 8. Atunci, baloanele roșii se pot folosi pentru 1 buchet (toate cele 8 baloane împreună), pentru 2 buchete (câte 4), pentru 4 buchete (câte 2) sau pentru 8 buchete (câte un balon în fiecare buchet). Pentru fiecare caz, ar trebui ca și fiecare dintre celelalte categorii de baloane să poată fi distribuite în *același număr de buchete*. Verificăm pentru fiecare categorie de baloane, dacă pot fi distribuite în același număr de buchete. Numărul 12 are divizorii: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Rezultă că baloanele mov nu pot fi distribuite în 8 buchete, ci doar în: 1, 2 sau 4 buchete (6 și 12 nu se regăsesc între variantele găsite pentru baloanele roșii)

Numărul 16 are divizorii: 1, 2, 4, 8, 16. Rezultă că baloanele galbene pot fi distribuite în: 1, 2 sau 4 buchete (16 nu se regăsește între variantele găsite pentru baloanele roșii), iar 8 nu este între cele găsite pentru baloanele mov). Numărul 20 are divizorii: 1, 2, 4, 5, 20. Rezultă că baloanele verzi pot fi distribuite doar în 1, 2 sau 4 buchete. (5 și 20 nu se regăsesc între variantele găsite pentru baloanele roșii).

Prezentăm rezultatul și rezolvarea subpunctului **b)** în tabelul de mai jos:

Numărul buchetelor	Calcul	Numărul baloanelor roșii din buchet	Numărul baloanelor mov din buchet	Numărul baloanelor galbene din buchet	Numărul baloanelor verzi din buchet	Numărul baloanelor din buchet
1	$8 = 1 \cdot 8$; $12 = 1 \cdot 12$; $16 = 1 \cdot 16$; $20 = 1 \cdot 20$;	8	12	16	20	56
2	$8 = 2 \cdot 4$; $12 = 2 \cdot 6$; $16 = 2 \cdot 8$; $20 = 2 \cdot 10$;	4	6	8	10	28
4	$8 = 4 \cdot 2$; $12 = 4 \cdot 3$; $16 = 4 \cdot 4$; $20 = 4 \cdot 5$;	2	3	4	5	14

Remarcăm că în fiecare caz, numărul buchetelor este divizor al fiecăruia dintre numerele corespunzătoare categoriei de baloane. Vom spune că numerele 1, 2 și 4 sunt *divizori comuni* ai numerelor 8, 12, 16, 20.

Problema 2. Elevii clasei a V-a pregătesc un spectacol. Toți elevii clasei vor evolua în fiecare din cele două dansuri pregătite. Pentru primul dans, elevii sunt grupați în perechi, iar pentru al doilea dans, aceștia sunt grupați câte 5. Știind că numărul elevilor clasei este mai mare decât 18 și este mai mic decât 28, aflați *efectivul* clasei.

Soluție. Pentru primul dans, elevii vor evolua în perechi. Cum toți elevii clasei participă la acest dans, deducem că numărul total al elevilor clasei este un *multiplu* al lui 2. Atunci, căutăm numerele mai mari decât 18 și mai mici decât 28, care sunt multipli ai lui 2. Acestea sunt: 20, 22, 24, 26.



Pentru al doilea dans, în același mod, deducem că este necesar ca efectivul clasei să fie *multiplu* al numărului 5. Numerele mai mari decât 18 și mai mici decât 28, care sunt multipli ai lui 5 sunt: 20 și 25. Pentru că elevii participă la ambele dansuri, alegem acel număr care se regăsește în ambele rezultate, adică în clasă sunt 20 de elevi. Numărul 20 este atât multiplu al lui 2 cât și multiplu al lui 5. Vom spune că este *multiplu comun* al celor două numere.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dacă numerele naturale a , b și d verifică relațiile $d|a$ și $d|b$, atunci numărul d este *divizor comun* al numerelor a și b .

Observație. Numărul 1 este *divizor comun* al tuturor numerelor naturale.

Dacă numerele naturale m , a și b verifică relațiile $m:a$ și $m:b$, atunci numărul m este *multiplu comun* al numerelor a și b .

Observație. Numărul 0 este *multiplu comun* al tuturor numerelor naturale.

7 este *divizor comun* al numerelor 14 și 21 pentru că $7|14$ și $7|21$.

$1|a$, oricare ar fi numărul natural a .

36 este *multiplu comun* al numerelor 12 și 9 pentru că $36:12$ și $36:9$.

$0:a$, oricare ar fi numărul natural a .



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

- a)** Considerăm numerele naturale $a = 17 \cdot 35720$ și $b = 17 \cdot 39728$. Demonstrați că 17 este divizor al numărului $a + b$.
- b)** Considerăm numerele naturale $a = 5 \cdot 35729$ și $b = 7 \cdot 35729$. Demonstrați că $a + b$ se divide la 35729.

- a)** $a + b = 17 \cdot 35720 + 17 \cdot 39728$;
 $a + b = 17 \cdot (35720 + 39728)$.
 Nu este necesar să mai facem calculele, pentru a vedea că $17|(a + b)$.
- b)** $a + b = 5 \cdot 35729 + 7 \cdot 35729 = 35729 \cdot (5 + 7)$;
 $a + b = 35729 \cdot (5 + 7)$;
 $a + b = 35729 \cdot 12$, deci $(a + b):35729$.

Aplicația 2.

Se consideră $A = 2^{n+2} + 2^n$, unde n este natural.

- a)** Scrieți cele mai mici 3 numere de forma A .
- b)** Arătați că 5 este divizor comun al numerelor de forma $A = 2^{n+2} + 2^n$, oricare ar fi numărul natural n .

- a)** Pentru fiecare valoare a numărului n , găsim un număr A . Pentru $n = 0$, avem $A = 2^2 + 2^0 = 5$, pentru $n = 1$, rezultă $A = 2^3 + 2^1 = 10$, iar pentru $n = 2$, rezultă $A = 2^4 + 2^2$, deci $A = 16 + 4 = 20$.
- b)** Din $A = 2^{n+2} + 2^n$, rezultă $A = 2^n \cdot 2^2 + 2^n$, adică $A = 2^n \cdot (2^2 + 1) = 2^n \cdot 5$, deci $A : 5$, oricare ar fi n număr natural.



Reținem

Dacă d este *divizor comun* al numerelor naturale a și b , atunci d este și *divizor* al numărului $a + b$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Un divizor comun al numerelor 28 și 63 este:
A. 7; B. 9; C. 21; D. 4.
 - Un multiplu comun al numerelor 8 și 20 este:
A. 100; B. 300; C. 60; D. 40.
- Copiați tabelul pe caiete, apoi completați casetele libere, după modelul dat:

a	15	14	30	66	25
b	25	21	40	99	32
Divizorii numărului a	1, 3, 5, 15				
Divizorii numărului b	1, 5, 25				
Divizorii comuni ai numerelor a și b	1, 5				


- Copiați tabelul pe caiete, apoi completați casetele libere, după modelul dat:

a	16	18	9	25
b	24	27	15	30
Numere de două cifre, multipli ai numărului a	16, 32, 48, 64, 80, 96			
Numere de două cifre, multipli ai numărului b	24, 48, 72, 96			
Numere de două cifre, multipli comuni ai numerelor a și b	48, 96			

- Scrieți divizorii comuni ai numerelor:
 - 28 și 35; b) 75 și 100;
 - 36 și 49; d) 20, 30 și 40.

- Scrieți câte trei multipli comuni ai numerelor:
 - 8 și 6; b) 15 și 20;
 - 7 și 11; d) 12, 18 și 36.
- Două tramvaie pleacă din stația A pe trasee diferite și revin în stația A, primul după 30 de minute, al doilea după 45 de minute, apoi pleacă din nou în cursă, în același mod, circulând cu aceeași viteză medie. Știind că prima plecare a fost la ora 7:00, stabiliți:
 - perioada cea mai mică de timp după care revin simultan în stația A;
 - de câte ori cele două tramvaie au plecări simultane între orele 7:00 și 12:00.



- Se consideră numerele naturale n , $A = 2^{n+2} + 2^n$ și $B = 3^{n+2} + 3^n$.
Arătați că A și B sunt divizori ai numărului $C = 10 \cdot 6^n$, oricare ar fi numărul natural n . 
- Pentru o donație, se distribuie în mod egal și se ambalează 78 de ciocolate și 52 de banane.
 - Stabiliți dacă numărul pachetelor poate fi 13.
 - Aflați numărul pachetelor, știind că este cel mai mare posibil.



Minitest

- (15 p) a) Scrieți divizorii comuni ai numerelor 18 și 24.
(15 p) b) Scrieți trei multipli comuni ai numerelor 2, 3 și 5.
- (15 p) a) Aflați numărul \overline{ab} , știind că este divizor comun al numerelor 54 și 81.
(15 p) b) Aflați numărul \overline{cd} , știind că este multiplu al numerelor 12 și 15.
- (30 p) Petru împarte prietenilor săi 35 pliante și 41 insigne, același număr de pliante și același număr de insigne fiecăruia dintre ei. Aflați câți prieteni are Petru, dacă rămâne cu cel mai mic număr posibil de obiecte.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 10ⁿ



Ne amintim

Ultima cifră a sumei a două numere naturale este dată de ultima cifră a sumei dintre ultima cifră a primului număr și ultima cifră a celui de-al doilea.

Ultima cifră a produsului a două numere naturale este dată de ultima cifră a produsului dintre ultima cifră a primului număr și ultima cifră a celui de-al doilea.

Orice număr natural de cel puțin două cifre se scrie ca sumă între un număr de zeci și un număr de unități.

În lecțiile anterioare am aflat că putem decide că un număr natural a este divizibil la un număr nenul d , dacă a se împarte exact la d .

Ultima cifră a sumei $238 + 297$ este ultima cifră a sumei $8 + 7$, adică ultima cifră a numărului 15, deci 5.

Ultima cifră a produsului $238 \cdot 297$ este ultima cifră a produsului $8 \cdot 7$, adică ultima cifră a numărului 56, deci 6.

$$2396 = 2390 + 6;$$

$$6545 = 6540 + 5.$$

De cele mai multe ori, efectuarea împărțirii este incomodă, deci căutăm *criterii de divizibilitate*, care ne oferă reguli cu ajutorul cărora stabilim dacă un număr natural a este divizibil cu un număr natural nenul d .



Rezolvăm și observăm

Problemă. În sala festivă, la spectacolul echipei de teatru a școlii noastre, au participat 40 de elevi de clasa a VII-a, 32 elevi de clasa a V-a și 35 de elevi de clasa a VI-a.

Scaunele au fost aranjate pe clase, pe trei coloane. Prima coloană este formată din rânduri a câte 2 scaune, a doua coloană este formată din rânduri a câte 5 scaune, iar a treia coloană este formată din rânduri a câte 10 scaune. Stabiliți care coloană corespunde fiecărui grup de elevi, știind că nu sunt rânduri incomplete.

Soluție. Pentru a nu rămâne rânduri incomplete, trebuie ca numărul celor din prima coloană să fie divizibil cu 2, numărul celor din coloana a doua să fie divizibil cu 5, iar numărul celor din coloana a treia să fie divizibil cu 10.

Din $40 = 4 \cdot 10$, și rezultă că elevii de clasa a VII-a pot fi grupați: câte 2, câte 5 sau câte 10. Încă nu putem decide unde vor sta.

Din $32 = 16 \cdot 2$ rezultă că elevii clasei a V-a pot fi grupați câte 2 dar nu pot fi grupați nici câte 5, nici câte 10, deci vor ocupa prima coloană.

Din $35 = 7 \cdot 5$, rezultă că elevii clasei a VI-a pot fi grupați câte 5 dar nu pot fi grupați câte 2, nici câte 10, deci ocupă coloana a doua. Rămâne că cei de clasa a VII-a vor ocupa coloana a treia.

Răspuns. clasa a V-a ocupă coloana I, clasa a VI-a ocupă coloana a II-a, clasa a VII-a ocupă coloana a III-a.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Observație. Dacă numărul spectatorilor ar fi fost mult mai mare, de exemplu 798, 1235 respectiv 290, calculul nu ar mai fi atât de convenabil. Atunci, folosim scrierea numerelor ca sumă de zeci și unități.

Un număr natural este divizibil cu 10 numai dacă este format doar din zeci, adică are cifra unităților 0.

Zece unități pot fi grupate și câte 2 (5 grupe), dar și câte 5 (2 grupe), prin urmare: Dacă un număr natural este divizibil cu 10, atunci el este divizibil și cu 5 și cu 2.

Ne întrebăm cum arată numerele care sunt divizibile cu 2 și nu sunt divizibile cu 10, sau cele care sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 10.



Dicționar

criteriu = principiu de apreciere, de definire, de caracterizare, de clasificare

$798 = 790 + 8$; $1235 = 1230 + 5$. În această scriere $790 : 2$ și $8 : 2$, de unde $798 : 2$. De asemenea, $1230 : 5$ și $5 : 5$, de unde $1235 : 5$.

Concluzie. Pentru a decide dacă un număr este divizibil cu 2, cu 5 sau cu 10, este suficient să stabilim acest lucru despre *ultima cifră a numărului*.



Reținem

Criteriul	Exemple
Dacă numărul natural a se divide la 2, atunci ultima sa cifră este număr par: 0, 2, 4, 6, 8.	Numerele de forma $\overline{978x}$, divizibile cu 2, sunt: 9780, 9782, 9784, 9786, 9788.
Dacă ultima cifră a numărului natural a este una dintre cifrele 0, 2, 4, 6, 8, atunci acesta se divide la 2.	$728 : 2$; $1396 : 2$; $984 : 2$; $722 : 2$; $9980 : 2$.
Dacă numărul natural a se divide la 5, atunci ultima sa cifră este 0 sau 5.	Numerele de forma $\overline{1978x}$, divizibile cu 5, sunt 19780 și 19785.
Dacă ultima cifră a numărului natural a este 0 sau 5, atunci acesta se divide la 5.	$210\ 980 : 5$; $210\ 985 : 5$.
Dacă numărul natural a se divide la 10, atunci ultima sa cifră este 0.	Singurul număr de forma $\overline{1978x}$, divizibil cu 10, este 19780.
Dacă ultima cifră a numărului natural a este 0, atunci acesta se divide la 10.	$210\ 980 : 10$; $210\ 990 : 10$.
Dacă numărul natural a se divide la 10^n , atunci ultimele n cifre ale sale sunt 0.	Numerele de forma $\overline{1xyz}$, divizibile cu 10^2 , sunt: 1000; 1100; 1200; 1300; 1400; 1500; 1600; 1700; 1800; 1900.
Dacă ultimele n cifre ale numărului natural a sunt 0, atunci acesta se divide la 10^n .	$210000 : 10^4$; $2107000 : 10^3$; $210900 : 10^2$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

Scrieți toate numerele divizibile cu 2, care au forma $x38x$.

Soluție.

a) Din $x38x : 2$, rezultă x este una dintre cifrele 0, 2, 4, 6, 8. Dar, x este prima cifră a numărului, deci $x \neq 0$.
Numerele căutate sunt: 2382, 4384, 6386, 8388.

Aplicația 2.

Fie sumele

$$S_1 = 5 + 10 + 15 + \dots + 555,$$

$$S_2 = 7^0 + 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{20}.$$

Arătați că:

a) $S_1 : 5$; **b)** $S_2 : 10$.

Soluție.

a) Fiecare termen al sumei are ultima cifră 0 sau 5, deci se divide la 5.
Atunci $S_1 : 5$.

b) $S_2 = (1 + 7^2) + 7^4 \cdot (1 + 7^2) + \dots + 7^{18} \cdot (1 + 7^2)$.

Cum $1 + 7^2 = 50$, rezultă

$$S_2 = 50 \cdot (1 + 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{18}) \text{ și } S_2 : 10$$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Considerăm șirul de numere naturale: 3, 8, 10, 13, 14, 19, 25, 30, 37, 34, 46.
Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - În șirul dat, sunt divizibile cu 2:
A. 5 numere; **B.** 6 numere; **C.** 7 numere; **D.** 8 numere.
 - În șirul dat, sunt divizibile cu 5:
A. 3 numere; **B.** 2 numere; **C.** 1 număr; **D.** 0 numere.
 - În șirul dat, sunt divizibile cu 10:
A. 0 numere; **B.** 1 număr; **C.** 2; **D.** 3 numere.
 - În șirul dat, sunt divizibile cu 2, dar nu sunt divizibile cu 5:
A. 5 număr; **B.** 2 numere; **C.** 3 numere; **D.** 4 numere.
- Copiați tabelul pe caiet și completați în casetele libere *da* sau *nu* după cum numărul n este divizibil sau nu este divizibil cu numărul indicat, după modelul dat.

n	10	36	40	75	100	225	300	1235	6543
divizibil cu 2	da								
divizibil cu 5	da								
divizibil cu 10	da								
divizibil cu 100	nu								

- Folosind cifrele 0, 5, 8, cel mult o dată fiecare, scrieți toate numerele naturale divizibile cu:
 - 2;
 - 5;
 - 10.
- Determinați numerele de forma $\overline{a7b}$, știind că sunt divizibile cu 10 și au suma cifrelor cel mult 11.
- Aflați cifra a în fiecare situație:
 - $19\overline{a}:5$;
 - $2 \mid \overline{a7a}$;
 - $10 \mid \overline{800a}$;
 - $100 \mid \overline{3aa0}$;
 - $\overline{6a} \nmid 2$;
 - $2 \nmid 2^a$;
 - $100 \nmid \overline{64a}$;
 - $5 \nmid \overline{2a7}$.
- Demonstrați că:
 - numărul $A = 11^{10} + 9$ este divizibil cu 10.
 - numărul $B = 6^{54} - 1$ este divizibil cu 5.
- Decideți argumentat dacă numărul $C = 3^{10} \cdot 5^{11} + 3^{11} \cdot 5^{10}$ este divizibil cu 2, cu 5 sau cu 10.
- Determinați numerele de forma \overline{abc} , multipli ai numărului 5, pentru care suma cifrelor este 7.



Minitest

- Pe trei cartonașe sunt scrise numere naturale, ca în imaginea alăturată. Precizați:
 - (15 p) culoarea cartonașului care conține cele mai multe numere divizibile cu 2;
 - (15 p) culoarea cartonașului care conține cele mai puține numere divizibile cu 5;
 - (20 p) dacă există un cartonaș care conține numere divizibile cu 10, care nu sunt divizibile cu 5.
- (20 p) **a)** Determinați numărul natural x , știind că $2 \mid x$ și $17 < x + 7 < 27$.
 (20 p) **b)** Determinați numărul natural y , știind că $5 \mid y$ și $37 < 2 \cdot (y - 1) < 57$.

7	30	148
	2223	
105		2^5

47	$8^2 - 4$
	58
3232	$101 + 3^2$

31	84	150
	3332	3^3

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L4 Criteriul de divizibilitate cu 3. Criteriul de divizibilitate cu 9



Rezolvăm și observăm

Problemă. Cristian a scris pe tablă numerele naturale de la 3 la 109. Benjamin taie cu o linie roșie multiplii lui 3, iar Bianca taie cu albastru multiplii lui 9.

- Aflați numărul numerelor tăiate cu roșu.
- Aflați numărul numerelor tăiate cu albastru.
- În fiecare dintre cazurile a) și b), alegeți 5 numere tăiate, calculați suma cifrelor pentru fiecare și identificați o proprietate comună a acestor sume.

a) De la 3 la 109 găsim următorii multipli ai numărului 3:

$3 = 3 \cdot 1, 6 = 3 \cdot 2, \dots, 108 = 3 \cdot 36$, deci au fost tăiate cu roșu 36 numere.

b) De la 3 la 109 găsim următorii multipli ai numărului 9:

$9 = 9 \cdot 1, 18 = 9 \cdot 2, \dots, 99 = 9 \cdot 11, 108 = 9 \cdot 12$, deci au fost tăiate cu albastru 12 numere.

c)	a)					b)				
	Numărul	12	48	99	105	108	9	27	54	99
Suma cifrelor	3	12	18	6	9	9	9	9	18	9

Pentru numerele divizibile cu 3, suma cifrelor este divizibilă cu 3, iar pentru numerele divizibile cu 9, suma cifrelor este divizibilă cu 9.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Criteriul	Exemple
Dacă un număr natural se divide la 3, atunci suma cifrelor sale se divide la 3.	Numerele de forma $\overline{1382a}$, divizibile cu 3, au proprietatea $14 + a$ este divizibil cu 3, adică cifra a poate fi: 1, 4, 7, iar numerele sunt: 13821, 13824 și 13827.
Dacă suma cifrelor unui număr natural se divide la 3, atunci acest număr se divide la 3.	Numerele 24, 39, 45, 9999, sunt divizibile cu 3 pentru că $2 + 4 = 6$ și $6:3$; $3 + 9 = 12$ și $12:3$; $4 + 5 = 9$ și $9:3$; $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ și $36:3$.
Dacă un număr natural se divide la 9, atunci suma cifrelor sale se divide la 9.	Numerele de forma $\overline{83a}$, divizibile cu 9, au proprietatea $11 + a$ este divizibil cu 9, adică cifra a poate fi 7, deci singurul număr divizibil cu 9, de această formă, este 837.
Dacă suma cifrelor unui număr natural se divide la 9, atunci acest număr se divide la 9.	Numerele 45, 954, 882, 999, sunt divizibile cu 9 pentru că $4 + 5 = 9$ și $9:9$; $9 + 5 + 4 = 18$ și $18:9$; $8 + 8 + 2 = 18$ și $18:9$; $9 + 9 + 9 = 27$ și $27:9$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

a) Arătați că numărul $B = 2^{10} \cdot 5^6 + 11$ este divizibil cu 9.

b) Arătați că numărul $C = abc + bca + cab$ este divizibil cu 3, oricare ar fi cifrele nenule a, b, c .

a) $B = 2^{10} \cdot 5^6 + 11 = (2 \cdot 5)^6 \cdot 2^4 + 11$;

$B = 10^6 \cdot 16 + 11$. Suma cifrelor numărului B este $1 + 6 + 1 + 1 = 9$, deci $B:9$.

b) $C = abc + bca + cab = 111 \cdot (a + b + c)$.

Numărul 111 are suma cifrelor 3, deci $111:3$.

Atunci, produsul $111 \cdot (a + b + c)$ se divide la 3, adică $C:3$.

Aplicația 2.

Demonstrați că sunt divizibile cu 3 toate numerele de trei cifre care se pot forma astfel încât cifrele să fie numere naturale consecutive, indiferent de ordinea în care sunt scrise aceste cifre.

Dintre numerele descrise mai sus, scrieți-le pe cele care sunt divizibile cu 9.

Indiferent de ordinea în care sunt scrise cifrele pentru a forma numărul, acesta este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor se divide la 3. Considerăm a cea mai mică dintre cifrele numărului. Atunci, numărul se formează cu cifrele $a, a + 1$ și $a + 2$, iar suma cifrelor este $3 \cdot a + 3$, adică $3 \cdot (a + 1)$, care se divide la 3. În concluzie, toate numerele de trei cifre, formate cu cifrele $a, a + 1, a + 2$, cu $a \leq 7$ sunt divizibile cu 3.

Pentru ca numărul să fie divizibil cu 9, trebuie ca $a + 1$ să fie divizibil cu 3, adică a poate fi: 2, 5 sau 8.

Cum $a \leq 7$, rezultă a poate fi 2 sau 5 și numerele căutate sunt: 234, 243, 324, 342, 423, 432, 567, 576, 657, 675, 756, 765.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Considerăm șirul de numere naturale: 0, 8, 21, 34, 48, 106, 270, 8159, 24444, 98765, $10^{10} + 2$.
Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
a) În șirul dat sunt divizibile cu 3:
A. 5 numere; B. 7 numere;
C. 6 numere; D. 8 numere.
b) În șirul dat sunt divizibile cu 9:
A. 4 numere; B. 3 numere;
C. 2 numere; D. 5 numere.
- Copiați tabelul pe caiet și completați în casetele libere „da” sau „nu” după cum numărul n este divizibil sau nu este divizibil cu numărul indicat.

n	15	35	42	108	576	906030	3^{10}
divizibil cu 3	da						
divizibil cu 9	nu						
- Folosind cifrele 0, 4, 5, 6, scrieți toate numerele de trei cifre distincte:
a) divizibile cu 3; b) divizibile cu 9.
- Arătați că dacă un număr natural este divizibil cu 9 atunci el este divizibil și cu 3.
- Se consideră numerele: 56, 78, 432, 642, 40777, 774000, $3^4 + 9$, $10^7 + 2$.
Scrieți numerele pe caiet, apoi subliniați numerele divizibile cu 3, care nu sunt divizibile cu 9.
- Scrieți toate numerele divizibile cu 3 care au forma:
a) $\overline{a4}$; b) $\overline{17a}$; c) $\overline{6a54}$; d) $\overline{a45a}$.
- Aflați cifra x în fiecare din situațiile:
a) $\overline{46x:3}$; b) $\overline{3\overline{x}234}$; c) $\overline{x3xx:9}$; d) $\overline{9\overline{x}315}$.
- Cercetați dacă există numere de forma $\overline{159x}$ divizibile cu 3 și cu 5.
- Fie numărul $A = 10^n - 1$, cu n număr natural.
a) Scrieți cele mai mici trei numere de această formă și precizați dacă sunt divizibile cu 3 sau cu 9.
b) Demonstrați că $A:9$, oricare ar fi numărul natural n .
- Arătați că numărul $B = 2^8 \cdot 5^6 + 5$ este divizibil cu 9.



Minitest

- (15 p) a) Scrieți toate numerele naturale mai mici decât 1000, care au produsul cifrelor 28. Precizați câte dintre acestea sunt divizibile cu 3.
(15 p) b) Scrieți toate numerele cuprinse între 480 și 500 care sunt divizibile cu 9.
- Se consideră numărul $A = 4^2 + 5^2 + 4 \cdot 5$. Determinați:
(20 p) a) cel mai mic număr natural x , pentru care $A + x$ este divizibil cu 3.
(20 p) b) cel mai mic număr natural y , pentru care $y - A$ este număr natural divizibil cu 9.
- (20 p) Sonia are $13x$ jetoane, iar Irina are de două ori mai multe jetoane.
Știind că numărul jetoanelor Irinei este un număr divizibil cu 9, aflați câte jetoane are fiecare.
Se acordă 10 puncte din oficiu.



L5 Numere prime. Numere compuse



Rezolvăm și observăm

Exercițiul 1.

Considerăm numerele 2, 7, 17, 22 și 27.

- a) Scrieți divizorii fiecărui număr dat.
b) Precizați numărul divizorilor fiecărui număr dat.

Rezolvare. a) și b) Completăm tabelul:

Numărul	2	49	17	22	27
Divizorii numărului	1; 2	1; 7; 49	1; 17	1; 2; 11; 22	1; 3; 9; 27
Numărul divizorilor	2	3	2	4	4

Se observă cu ușurință că unele dintre numerele date au *exact doi divizori* (numărul 1 și numărul însuși), iar altele au și alți divizori, înafară de 1 și numărul însuși.

Dacă a este un număr natural nenul oarecare, este evident că se poate scrie egalitatea $a = 1 \cdot a$, de unde 1 și a sunt divizori ai numărului a . Atunci:

Orice număr natural $a \geq 2$ are cel puțin doi divizori, 1 și a , numiți *divizori improprii*.
Dacă numărul a are și alți divizori, aceștia se numesc *divizori proprii*.

Exemplu:

Divizorii numărului 10 sunt: 1, 2, 5, 10.
1 și 10 sunt *divizori improprii*;
2 și 5 sunt *divizori proprii*.

Observație. Pentru numerele 0 și 1 *nu se pune problema divizorilor improprii sau a divizorilor proprii*. 0 are o infinitate de divizori, iar 1 are exact un divizor, număr natural.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Exercițiul 2.

- a) Alegeți din imaginea alăturată numerele pare care au exact 2 divizori. Justificați alegerea făcută.
b) Alegeți din imaginea alăturată numerele impare care au exact 2 divizori. Justificați alegerea făcută.

Rezolvare.

- a) Singurul număr par care are 2 divizori este numărul 2. Toate celelalte numere sunt divizibile la 1, la ele însele, la 2, eventual și la alte numere.
b) Numerele impare din imagine care au doar 2 divizori sunt: 3; 5; 7. Numărul 1 are un singur divizor, iar numărul 9 are 3 divizori.



Din exercițiul anterior, deducem că unele numere naturale au *doar divizori improprii*, iar altele au și *divizori improprii și divizori proprii*.

Un număr natural $p \geq 2$ care are exact doi divizori (1 și p) se numește *număr prim*.

Orice număr natural $n \geq 2$ care nu este număr prim, se numește număr *compus*.

Sunt *prime* numerele: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; ...

Sunt *compuse* numerele: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 27; ...

Observație.

- Dacă numărul natural $p \geq 2$ este *număr prim*, atunci acesta are doar divizori improprii.
- Dacă numărul natural $p \geq 2$ are numai divizori improprii, atunci p este număr prim.
- Singurul număr par*, care este număr *prim*, este numărul 2.
(Toate celelalte numere pare se divid la 2, deci au cel puțin un divizor propriu)
- Numerele 0 și 1 *nu sunt nici numere prime și nici numere compuse*.

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97



Exercițiul 1. Stabiliți dacă numerele 79 și 323 sunt numere prime sau numere compuse.

Soluție. Verificăm dacă numerele date au divizori, folosind criteriile de divizibilitate cunoscute sau folosind operația de împărțire la numere prime, în ordine crescătoare, începând cu numărul 2. Ne oprim atunci când pătratul numărului prim verificat depășește numărul.

Numărul 79 nu verifică niciunul dintre criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 5.

Primul număr prim mai mare decât 5 este 7, dar $79 = 7 \cdot 11 + 2$, adică 79 nu se divide la 7 sau

$79 = 11 \cdot 7 + 2$, adică 79 nu se divide nici la 11.

Am verificat numerele prime până la 11.

Cum $11^2 > 79$, deducem că 79 nu are nici divizori mai mari decât 11, adică este *număr prim*.

Numărul 323 nu verifică niciunul dintre criteriile de divizibilitate cu 2, 3, 5.

Primul număr prim mai mare decât 5 este 7, dar $323 = 7 \cdot 46 + 1$, adică nu se divide la 7. Următorul număr

prim este 11, iar $323 = 11 \cdot 29 + 4$, deci nu se divide la 11.

Urmează 13, iar $323 = 13 \cdot 24 + 11$, deci nu se divide la 13. Mai încercăm și cu 17 și găsim $323 = 17 \cdot 19$, deci are

divizorii proprii 17 și 19 și este *număr compus*.

Exercițiul 2. Aflați numerele prime de forma $\overline{33x}$.

Soluție. Numerele sunt prime, deci nu au divizori proprii. Atunci, $\overline{33x}$ nu este divizibil cu 2 sau cu 5, adică x nu poate fi 0, 2, 4, 6, 8, 5. Eliminăm, de asemenea, valorile pentru care suma cifrelor $3 + 3 + x$ este divizibilă cu 3, adică eliminăm cifrele 3 și 9. Au rămas valorile 1 și 7. Numerele ar fi: 331 și 337. Verificăm dacă acestea nu au alți divizori. $331 = 7 \cdot 47 + 2$; $331 = 11 \cdot 30 + 1$; $331 = 13 \cdot 25 + 6$; $331 = 17 \cdot 19 + 8$. În concluzie, 331 nu are divizori primi până la 19. Cum $19^2 > 331$, rezultă că 331 este prim. În mod analog lucrăm cu 337, care este, de asemenea, prim. Corespund cerinței 331 și 337.

În rezolvarea problemelor de matematică, mai ales a celor care țin de teoria numerelor, este foarte util să identificăm și să argumentăm faptul că un număr natural este număr prim sau că este pătrat perfect. Următoarele afirmații ne pot oferi câteva tehnici elementare în acest sens.

1. Dacă n este număr prim, atunci acesta nu este pătrat perfect.

2. Dacă un număr natural este divizibil la două numere prime, atunci acesta este divizibil și la produsul lor.

3. Dacă numărul a este pătrat perfect, p este număr prim, divizor al lui a , atunci p^2 este, de asemenea, divizor al lui a (p este prim, $p|a$ și a este pătrat perfect, atunci $p^2|a$).

4. Dacă n este număr natural, iar p este număr prim astfel încât $p|a$ și $p^2 \nmid a$, atunci a nu este pătrat perfect.

1. Dacă n este număr prim, atunci are exact 2 divizori (1 și n). Orice pătrat perfect, diferit de 0 și de 1, (p^2 , $p \geq 2$) are cel puțin 3 divizori: 1, p , p^2 , deci n nu poate fi pătrat perfect.

2. Din $52 : 2$ și $52 : 13$, rezultă $52 : (2 \cdot 13)$, adică $52 : 26$.

3. Numărul 36 este pătrat perfect, iar 3 este număr prim și $3|36$. Rezultă $3^2|36$. 2386^2 este pătrat perfect și $2|2386^2$. Atunci, $4|2386^2$.

4. Din $3 | 23853$ și $9 \nmid 23853$, rezultă 23853 nu este pătrat perfect.

Proprietățile enunțate anterior ilustrează faptul că orice număr natural compus se poate scrie ca produs de numere prime.



Reținem

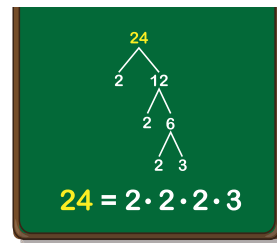
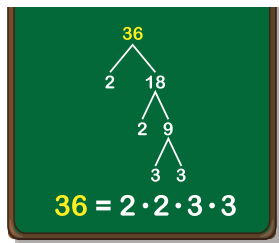
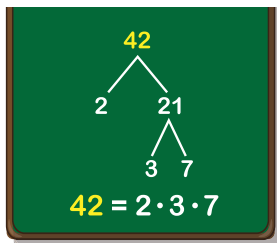
Orice număr natural $n \geq 2$ se poate scrie ca *putere a unui număr prim* sau ca *produs de puteri cu bazele numere prime diferite (în mod unic, făcând abstracție de ordinea factorilor)*.

$$\begin{aligned} 2 &= 2^1; & 3 &= 3^1; & 4 &= 2^2; & 5 &= 5^1; & 6 &= 2 \cdot 3; \\ 7 &= 7^1; & 8 &= 2^3; & 9 &= 3^2; & 10 &= 2^1 \cdot 5^1; & 11 &= 11^1; \\ 12 &= 2^2 \cdot 3^1; & 13 &= 13^1; & 14 &= 2^1 \cdot 7^1; & 15 &= 3^1 \cdot 5^1; & 16 &= 2^4; \end{aligned}$$

Scrierea descrisă mai sus se numește *descompunerea în factori primi a numărului n* .

Vom descrie tehnica descompunerii numerelor naturale în factori primi prin exemple.

Descompunerea în factori a numerelor 42, 36, 24 este ilustrată mai jos.



$42 = 2 \cdot 21$; $21 = 3 \cdot 7$; $7 = 7 \cdot 1$
Concluzie. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$.

$36 = 2 \cdot 18$; $18 = 2 \cdot 9$; $9 = 3 \cdot 3$; $3 = 3 \cdot 1$;
Concluzie. $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$.

$24 = 2 \cdot 12$; $12 = 2 \cdot 6$; $6 = 2 \cdot 3$; $3 = 3 \cdot 1$;
Concluzie. $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$.

Observații. 1. Dacă numărul natural a este pătrat perfect, atunci în descompunerea sa în factori primi toți exponenții sunt numere pare.

2. Dacă în descompunerea în factori primi a unui număr natural toți exponenții sunt numere pare, atunci, acesta este pătrat perfect.

3. Dacă în descompunerea în factori primi a numărului natural a există cel puțin un factor al cărui exponent este impar (factor care nu este pătrat perfect), atunci a nu este pătrat perfect.

1. Dacă $a = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^{4-n}$ este pătrat perfect, atunci $4 - n$ este număr natural par, adică n poate fi: 0, 2, 4.

2. Numărul $b = 2^{2022} \cdot 3^{4044} \cdot 5^4 \cdot 17^{200}$ este pătrat perfect pentru că exponenții tuturor factorilor primi ai descompunerii sunt numere pare.

3. Numărul $c = 3^{2022} \cdot 11^{4044} \cdot 5^4 \cdot 17^3$ nu este pătrat perfect pentru că există printre exponenții factorilor primi ai descompunerii și numere impare.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1.

- Scrieți numerele 96 și 10 ca produs de factori primi.
- Folosind descompunerea numărului 10, scrieți numărul 100 ca produs de puteri de numere prime.
- Determinați numerele naturale n astfel ca numărul $a = 7^{21} \cdot 2^n \cdot 5^4$ să fie divizibil cu 10^2 .

Soluție.

- 96 are ultima cifră 6, care este număr par, deci se divide la 2. Atunci, $96 = 2 \cdot 48$; 48 are ultima cifră 8, deci se divide la 2 și $48 = 2 \cdot 24$, adică $96 = 2 \cdot 2 \cdot 24$; 24 are ultima cifră 4, deci se divide la 2 și $24 = 2 \cdot 12$, adică $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12$; 12 are ultima cifră 2, deci se divide la 2 și $12 = 2 \cdot 6$, adică $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$; Dar, $6 = 2 \cdot 3$ și 96 se va scrie $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ sau $96 = 2^5 \cdot 3$.
- $10 = 2^1 \cdot 5^1$, $100 = 10^2$, adică $100 = (2 \cdot 5)^2$, deci $100 = 2^2 \cdot 5^2$.
- Numărul a se divide la 10^2 dacă în descompunere apar factorii 2 și 5 cu exponenți cel puțin egali cu 2, adică numărul n poate fi orice număr natural nenul, par.

Dacă un număr natural este descompus în factori primi, este mult mai ușor să enumerăm toți divizorii acestuia.



Aplicația 2. Asociați fiecărei *litere* care identifică un număr, scris în coloana A, *cifra* scrisă în coloana B, corespunzătoare numărului de divizori pe care îi are acel număr.

A	B
a. 49	1. doi divizori
b. 27	2. trei divizori
c. 31	3. patru divizori
d. 18	4. cinci divizori
	5. șase divizori

Soluție

$49 = 7^2$ și are divizorii: 1, 7, 49, deci are 3 divizori, asociem litera **a** cu cifra **2**. ($a \rightarrow 2$);
 $27 = 3^3$ și are divizorii: 1, 3, 9, 27 deci are 4 divizori, asociem litera **b** cu cifra **3**. ($b \rightarrow 3$)
 $31 = 31^1$ și are divizorii: 1, 31, deci are 2 divizori, asociem litera **c** cu cifra **1**. ($c \rightarrow 1$);
 $18 = 2 \cdot 3^2$ și are divizorii: 1, 2, 3, 6, 9, 18, deci are 6 divizori, asociem litera **d** cu cifra **5**. ($d \rightarrow 5$).



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

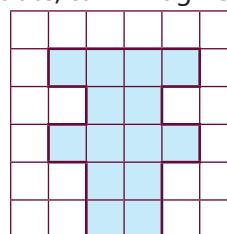
1. Copiați pe caiete tabelul, apoi completați casele libere, folosind modelul dat în prima coloană a tabelului.

Numărul	20	13	45	58
Divizorii numărului	1, 2, 4, 5, 10, 20			
Divizori proprii	2, 4, 5, 10			
Divizori improprii	1, 20			

2. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
- a) Un număr prim are:
- A.** un divizor; **B.** doi divizori;
C. trei divizori; **D.** o infinitate de divizori.
- b) Un număr compus are:
- A.** doi divizori; **B.** un divizor;
C. cel mult doi divizori; **D.** cel puțin trei divizori.
- c) Numărul numerelor prime din șirul 1, 2, 3, 9, 14, 19, 27, 31, 43, 65, este:
- A.** 5; **B.** 3; **C.** 4; **D.** 6.
- d) Cel mai mare număr prim de forma $a3$ este:
- A.** 93; **B.** 73; **C.** 83; **D.** 53.
3. Copiați tabelul pe caiete, apoi completați simbolul \times în coloana corespunzătoare valorii de adevăr a propozițiilor:

Propoziția	A	F
p_1 : Numărul 77 este număr prim.		
p_2 : Numărul 69 este număr compus.		
p_3 : Dacă numărul p este prim, atunci el este număr impar.		
p_4 : Orice număr impar este număr prim.		
p_5 : Suma a două numere prime este un număr compus.		
p_6 : Produsul a două numere prime este un număr prim.		

4. Ioana a colorat mai multe pătrățele ale unei rețele de pătrate, ca în imagine.



Ana și Bianca privesc rezultatul și spun:

Ana: — Numărul pătratelor colorate nu este un număr prim.

Bianca: — Dacă Ioana ar fi colorat cu un pătrățel mai puțin, atunci atât numărul pătratelor colorate cât și cel al pătratelor necolorate ar fi fost numere prime.

Stabiliți dacă Ana are dreptate și dacă Bianca are dreptate.

5. Scrieți numerele prime cuprinse între 68 și 107.
6. Stabiliți care dintre numerele următoare sunt compuse: 57, 79, 109, 121, 153, 547, 986, 1235, 2021.
7. Aflați două numere prime, știind că suma lor este 45.
8. Scrieți ca sumă de numere prime numerele: 13, 40, 68, 91.
9. Produsul a două numere naturale este 96. Aflați numerele, știind că unul dintre ele este prim. Analizați toate cazurile posibile.
10. Aflați numărul prim p , știind că $(p - 3) | 50$.
11. Aflați numerele prime \overline{ab} pentru care $5 | \overline{ba}$.
12. Determinați numerele prime p și q pentru care $3 \cdot p + 7 \cdot q = 56$.





Minitest

- (20 p) **1. a)** Scrieți toate numerele de două cifre care se scriu ca produs între două numere prime distincte.
- (15 p) **b)** Scrieți ca produs de factori primi numărul 84.
- (15 p) **2.** Justificați faptul că 137 este număr prim și că 253 este număr compus.
- 3.** Fie numărul $A = 2^6 \cdot 25^3 + 23$.
- (20 p) **a)** Calculați suma cifrelor numărului A .
- (20 p) **b)** Arătați că numărul A este compus.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți enunțuri adevărate:

- (5p) **1.** Divizorii comuni ai numerelor 18 și 24 sunt
- (5p) **2.** Cel mai mare multiplu de trei cifre a numărului 75 este ...
- (5p) **3.** Numerele de forma $\overline{21a}$, divizibile cu 5, sunt
- (5p) **4.** Suma celor mai mici trei numere prime este ...

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) **1.** Șirul 4, 11, 16, 35, 58, 2^{20} , 44^4 conține n numere divizibile cu 2. Numărul n este:
A. 3; **B.** 5; **C.** 4; **D.** 2.
- (5p) **2.** Șirul 107, 144, 190, 207, 233, 372, 405, 777, 3^{10} , 2^{25} conține m numere divizibile cu 9.
Numărul m este:
A. 3; **B.** 5; **C.** 2; **D.** 4.
- (5p) **3.** Scris ca produs de numere prime, numărul 63 este:
A. $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$; **B.** $1 \cdot 4 \cdot 21$; **C.** $3 \cdot 3 \cdot 7$; **D.** $2 \cdot 6 \cdot 7$.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- 1.** Determinați:
- (10p) **a)** numerele de forma $\overline{1a2b}$ divizibile cu 2, știind că $a + b = 13$.
- (10p) **b)** numerele de forma $\overline{a23a}$, divizibile cu 3.
- (20p) **2.** Aflați multiplii numărului 5, cuprinși între $A = 2^3 \cdot 2^4 + 1$ și $B = 4^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 4$.
- (15p) **3.** Fie numărul $C = 10^6 - 5^2$.
- a)** Arătați că numărul C este divizibil cu 25.
- b)** Stabiliți dacă numărul C este divizibil cu 9.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



Test de evaluare sumativă

Subiectul I. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (10 p) 1. Dacă $\overline{4a7} > 487$, atunci cifra a este egală cu:
A. 6; B. 7; C. 8; D. 9.
- (10 p) 2. Dacă $\overline{54b8} < \overline{541b}$, atunci cifra b este egală cu:
A. 9; B. 3; C. 0; D. 4.
- (10 p) 3. Numărul natural care admite scrierea $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5$, este:
A. 725; B. 7205; C. 7205; D. 72 500.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

- (10 p) 1. Suma a două numere este 15. Aflați numerele, știind că produsul lor este cel mai mare posibil.
- (10 p) 2. Dintre numerele naturale cu cifre nenule, având suma cifrelor 10, aflați-l pe cel mai mic, apoi pe cel mai mare.
- (15 p) 3. Fie numerele $a = 7 + 7 \cdot (225 : 9 - 2^3)$ și $b = 44 \cdot 9 + 44 \cdot 89 + (132 : 3) \cdot 2$.
a) Arătați că a este divizibil cu 9, iar b este multiplu al lui 10.
b) Determinați câtul și restul care se obțin împărțind numărul b la numărul a .
- (10 p) 4. O familie este formată din trei membri: tatăl, mama și fiul lor. Mama are 32 de ani, iar fiul are 6 ani. Acum trei ani, suma vârstelor celor trei membri ai familiei era 64 de ani. Aflați câți ani are în prezent tatăl.



- (15p) 5. Biblioteca lui Raul are 5 rafturi. Pe fiecare raft se află cel puțin 12 cărți și oricare două rafturi au număr diferit de cărți.
a) Precizați dacă în biblioteca lui Raul pot fi 69 de cărți.
b) Dacă pe fiecare raft ar fi număr prim de cărți, aflați cel mai mic număr de cărți pe care le-ar avea Raul în bibliotecă.



Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.





Schemă recapitulativă a capitolului

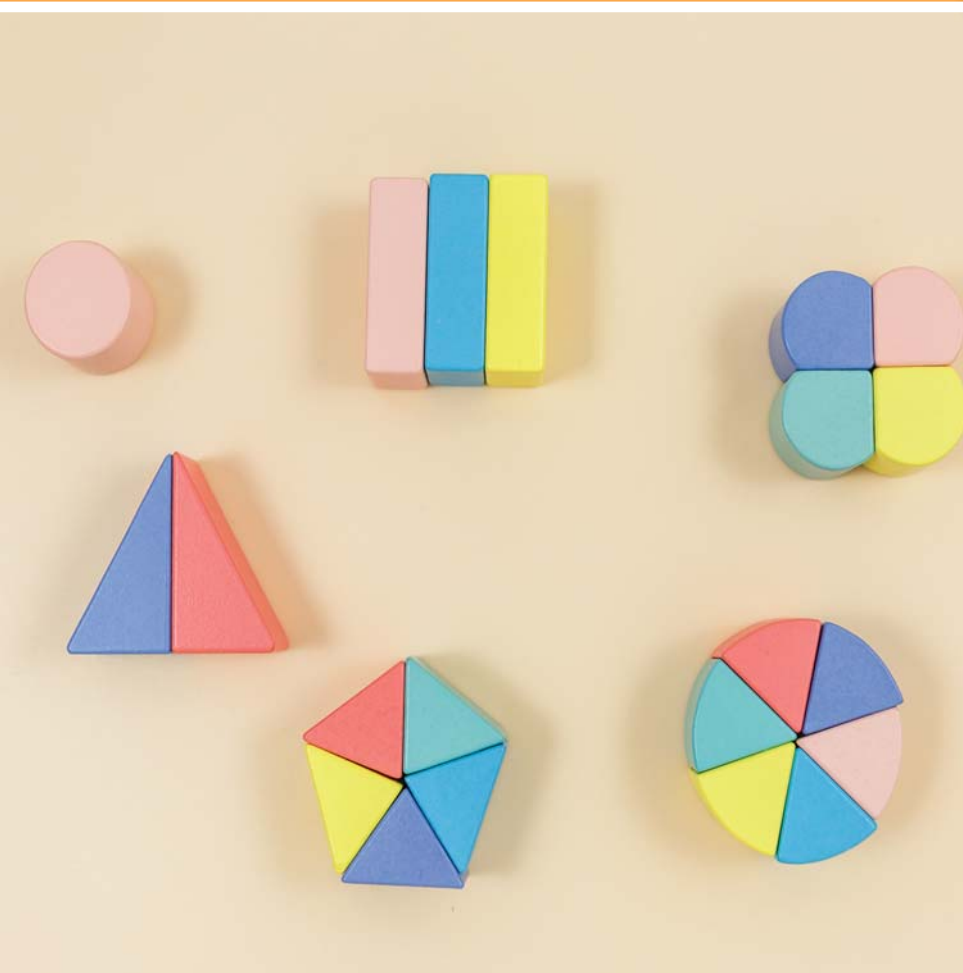


CAPITOLUL II

FRAȚII ORDINARE

PROIECT

Fracții, geometrie și... fractali



A. Observați imaginile de mai jos.



a) Realizați și voi aceste imagini, urmând indicațiile de mai jos.

Triunghiul 0. Desenați un triunghi cu toate laturile de aceeași lungime. Colorați-l.

Triunghiul 1.

Pasul 1. Desenați un alt triunghi de aceeași mărime cu triunghiul 0.

Pasul 2. Marcați mijlocul fiecărei laturi și uniți cele trei puncte.

Pasul 3. Colorați triunghiurile formate, mai puțin pe cel din mijloc, care rămâne necolorat.

Triunghiul 2.

Repetăți pașii 1 și 2 de la triunghiul 1.

Triunghiul din mijloc rămâne necolorat, iar pentru celelalte trei triunghiuri care au fost colorate repetăm pașii 2 și 3 de la triunghiul 1.

Triunghiurile 3 și 4 se realizează în același mod, pentru triunghiurile nou formate prin înjumătățirea laturilor.

Ceea ce s-a obținut (ilustrat în imaginea dată) constituie primele 4 iterații ale *triunghiului lui Sierpiński*.

B.



În imaginea de mai sus sunt primele 3 iterații ale *pătratului lui Cantor*.

Cum se construiește? Se împarte fiecare latură a pătratului inițial în 3 părți egale. Se unesc punctele corespunzătoare de pe laturile opuse, formându-se 9 pătrate. Se colorează doar pătratele din colțuri.

C. a) Realizați un portofoliu cu desenele construite.

b) Pentru fiecare dintre triunghiurile 1-4 și pătratele 1-4 scrieți fracția care reprezintă partea colorată din triunghi, respectiv din pătrat.

D. Triunghiul lui *Sierpiński* și pătratul lui Cantor sunt FRACTALI. Informează-te despre ce sunt aceștia și despre minunata lume a fractalilor.

1. FRAȚII ORDINARE

2. OPERAȚII CU FRAȚII ORDINARE

Competențe specifice: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2.



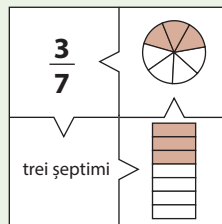
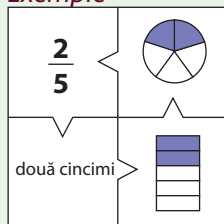
1 FRAȚII ORDINARE

L1 Frații ordinare. Frații subunitare, fracții echiunitare, fracții supraunitare

Ne amintim

Dacă un întreg este împărțit în părți egale, atunci fiecare dintre aceste părți se numește *unitate fracționară* (doime, treime, pătrime, cincime, șesime, șeptime, ...).
Un număr natural de unități fracționare se numește *fracție*.

Exemple



Dacă luăm în considerare p părți (unități fracționare), unitatea fiind a n -a parte dintr-un întreg, se formează *fracția ordinară* $\frac{p}{n}$, care se citește „ p supra n ”.

A suta parte dintr-un întreg se numește *unitate procentuală* sau *procent* și se scrie $\frac{1}{100}$ (unu supra o sută).
Fracția $\frac{n}{100}$ se mai poate scrie $n\%$ și reprezintă n sutimi sau n procente.

Elementele fracției	Scrierea fracției
Linia care separă cele două numere se numește <i>linie de fracție</i> . Numărul n , scris sub linia de fracție, se numește <i>numitor</i> . Numărul p , care reprezintă <i>numărul unităților fracționare</i> luate în considerare, se numește <i>numărător</i> .	p → Numărător $-$ → Linie de fracție n → Numitor

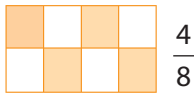
Exemple

Partea colorată reprezintă:



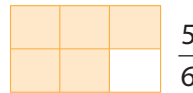
$$\frac{2}{3}$$

două treimi



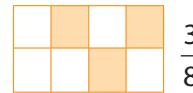
$$\frac{4}{8}$$

patru optimi



$$\frac{5}{6}$$

cinci șesimi



$$\frac{3}{8}$$

trei optimi

Observație. Numitorul oricărei fracții este un număr nenul.

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Frații subunitare, echiunitare, supraunitare

Un întreg are exact două doime, trei treimi, patru pătrimi și așa mai departe. În general, dacă unitatea fracționară este a n -a parte din întreg, atunci întregul are exact n părți.

Se pot scrie o infinitate de fracții ordinare cu numitorul n , oricare ar fi n număr natural nenul. De exemplu:

cu numitorul 2, se scriu fracțiile: $\frac{0}{2}; \frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \dots$

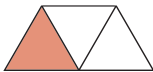
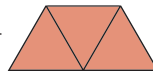
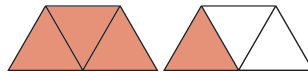
Fracțiile $\frac{0}{2}$ și $\frac{1}{2}$ reprezintă *mai puțin decât un întreg* și se numesc *fracții subunitare*.

Fracția $\frac{2}{2}$ reprezintă exact un întreg și se numește *fracție echiunitară*.

Fracțiile $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ reprezintă *mai mult decât un întreg* și se numesc *fracții supraunitare*.

Ilustrăm cele de mai sus pentru fracțiile cu numitorul 3.



Tipul de fracție	Fracție subunitară	Fracție echiunitară	Fracție supraunitară
Fracția	$\frac{1}{3}$ 	$\frac{3}{3}$ 	$\frac{4}{3}$ 
Cum citim	O treime Unu supra trei	Trei treimi Trei supra trei	Patru treimi Patru supra trei
Relația între numărător și numitor	$1 < 3$	$3 = 3$	$4 > 3$



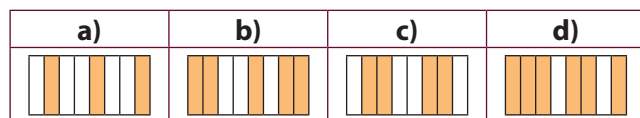
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Prezentare	Exemple	Justificare
1. O fracție ordinară care are numărătorul mai mic decât numitorul este o <i>fracție subunitară</i> . Aceasta reprezintă <i>mai puțin decât un întreg</i> .	$\frac{1}{4}; \frac{3}{5}; \frac{7}{9}; \frac{9}{10}; \frac{99}{100}; \frac{1}{21}$	$1 < 4; 3 < 5; 7 < 9;$ $9 < 10; 99 < 100; 1 < 21.$
2. O fracție ordinară care are numărătorul egal cu numitorul este o <i>fracție echiunitară</i> . Aceasta reprezintă <i>exact un întreg</i> .	$\frac{1}{1}; \frac{4}{4}; \frac{5}{5}; \frac{9}{9}; \frac{10}{10}; \frac{100}{100}; \frac{21}{21}$	$1 = 1; 4 = 4; 5 = 5; 9 = 9;$ $10 = 10; 100 = 100; 21 = 21.$
3. O fracție ordinară care are numărătorul mai mare decât numitorul este o <i>fracție supraunitară</i> . Aceasta reprezintă <i>mai mult decât un întreg</i> .	$\frac{6}{4}; \frac{8}{5}; \frac{14}{9}; \frac{12}{10}; \frac{105}{100}; \frac{405}{21}$	$6 > 4; 8 > 5; 14 > 9; 12 > 10;$ $105 > 100; 405 > 21.$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Alegeți varianta corectă de răspuns.
În fiecare dintre reprezentările următoare, partea colorată reprezintă o fracție.



- a) Frația $\frac{5}{8}$ este reprezentată, prin porțiunea colorată, în desenul:
A. a); B. b); C. c); D. d).
- b) Frația $\frac{4}{8}$ este reprezentată, prin porțiunea colorată, în desenul:
A. a); B. b); C. c); D. d).
2. Scrieți sub formă de fracție:
a) o doime; d) patru miimi;
b) trei pătrimi; e) o zecime;
c) patru treimi; f) o mie de sutimi.
3. Scrieți pe caiete cum citiți fracțiile:
 $\frac{1}{4}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{2}{5}, \frac{9}{9}, \frac{7}{2}, \frac{15}{7}, \frac{13}{10}$.
4. Scrieți fracțiile reprezentate de:
a) trei zile dintr-o săptămână;
b) cinci ore dintr-o zi;
c) cincizeci de minute dintr-o oră.
5. Scrieți toate fracțiile subunitare care au numitorii:
a) 3; b) 5; c) 6; d) 8.
6. Scrieți toate fracțiile supraunitare care au numărătorii:
a) 8; b) 6; c) 5; d) 4.
7. Scrieți cinci fracții subunitare care să aibă la numărător număr par, divizibil cu 3, iar la numitor, număr impar, divizibil cu 5.
8. Dintre fracțiile
 $\frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \frac{12}{12}, \frac{312}{311}, \frac{405}{406}, \frac{102}{101}, \frac{221}{325}, \frac{723}{230}$
alegeți și scrieți pe cele care sunt:
a) echiunitare; b) supraunitare; c) subunitare.
9. Scrieți:
a) trei fracții subunitare cu numitorul 5;
b) trei fracții supraunitare cu numărătorul 9;
c) trei fracții echiunitare.

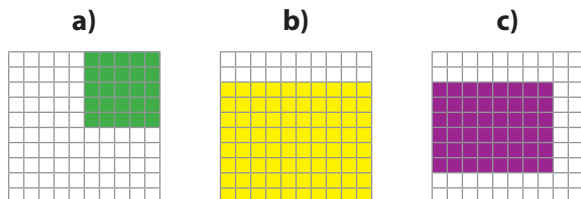
10. a) Reprezentați, prin câte un desen, fracțiile:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{6}{6}, \frac{17}{8}, \frac{9}{10}.$$

b) Grupați fracțiile de mai sus în: fracții subunitare, fracții echiunitare, fracții supraunitare.

11. Scrieți ca fracție ordinară, apoi scrieți în procente: o sutime, douăzeci și trei de sutimi, o sută de sutimi.

12. Scrieți sub formă de procent suprafețele colorate:



13. a) Determinați numărul natural a , știind că fracția $\frac{2}{a+1}$ este supraunitară.

b) Determinați numărul natural b , știind că fracția $\frac{b+2}{4}$ este subunitară.

c) Determinați numărul natural c , știind că fracția $\frac{5}{c-7}$ este echiunitară.

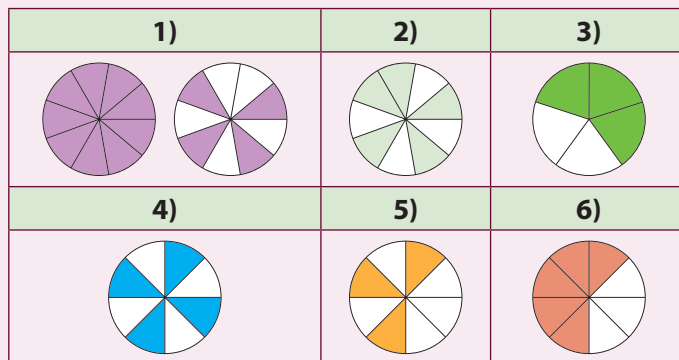
14. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}$, știind că a și b sunt numere naturale și că $1 < a \leq 4 \leq b < 6$.



Minitest

(20 p) 1. a) Scrieți fracția corespunzătoare părții colorate din fiecare desen.

(20 p) b) Scrieți fracția corespunzătoare părții necolorate din fiecare desen.



2. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(25 p) a). Numărul fracțiilor subunitare din șirul $\frac{13}{12}, \frac{7}{8}, \frac{2^4}{20}, \frac{3^3-5}{23}, \frac{66}{7 \cdot 9}, \frac{11^2}{5^3}$, este:

- A. 4; B. 5; C. 6; D. 3.

(25 p) b) Frația $\frac{52-x}{27}$ este echiunitară pentru x egal cu:

- A. 23; B. 24; C. 27; D. 25.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Frații echivalente



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ioana și Mihai au pregătit câte o cutie cu mărtișoare pentru târgul de primăvară de la școală. Fiecare exprimă ca fracție ce parte din cutia pregătită ocupă mărtișoare de același fel.

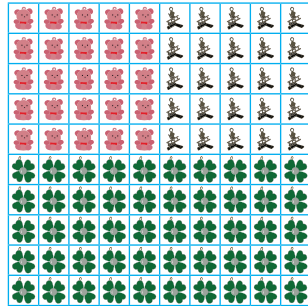
Observați ce a scris fiecare și stabiliți dacă puteau scrie și *alte fracții* care să reprezinte *aceeași parte* din cutie.

Mihai:

$$\text{🍷} \rightarrow \frac{25}{100} \text{ sau } \frac{1}{4}$$

$$\text{🍷} \rightarrow \frac{25}{100} \text{ sau } \frac{1}{4}$$

$$\text{🍀} \rightarrow \frac{50}{100} \text{ sau } \frac{1}{2}$$



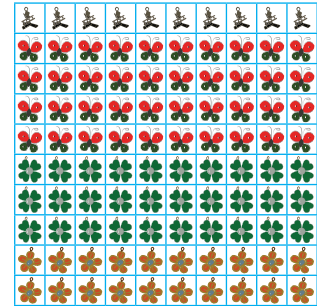
Ioana:

$$\text{🍷} \rightarrow \frac{10}{100} \text{ sau } \frac{1}{10}$$

$$\text{🍷} \rightarrow \frac{40}{100} \text{ sau } \frac{4}{10}$$

$$\text{🍀} \rightarrow \frac{30}{100} \text{ sau } \frac{3}{10}$$

$$\text{🍷} \rightarrow \frac{20}{100} \text{ sau } \frac{2}{10}$$



Numărul mărtișoarelor de tipul 🍷 reprezintă, în cutia lui Mihai, un sfert din numărul total, adică o pătrime din cutie. În același timp, mărtișoarele de acest tip ocupă 25 de locuri din totalul de 100 pe care le are cutia, adică 25 de sutimi. Fiecare parte poate fi reprezentată de mai multe fracții, *în funcție de unitatea fracționară considerată* (pătrime, sutime, ...).

Două fracții care reprezintă aceeași parte din întreg se numesc fracții echivalente.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Perechile de fracții scrise de cei doi copii sunt perechi de *fracții echivalente*.

Scriem $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ și observăm că $25 \cdot 4 = 1 \cdot 100$, apoi scriem $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ și observăm $50 \cdot 2 = 1 \cdot 100$.

Concluzii

1. Dacă fracțiile sunt echivalente, atunci produsul dintre numărătorul primei fracții și numitorul celei de-a doua este egal cu produsul dintre numitorul primei fracții și numărătorul celei de-a doua.

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ atunci } a \cdot d = b \cdot c.$$

2. Dacă produsul dintre numărătorul primei fracții și numitorul celei de-a doua este egal cu produsul dintre numitorul primei fracții și numărătorul celei de-a doua, atunci fracțiile sunt echivalente.

$$\text{Dacă } a \cdot d = b \cdot c, \text{ atunci } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Evident, numerele b și d sunt nenule.

Exemplu

$$\frac{8}{64} \quad \frac{3}{24} \quad \frac{2}{16}$$

$$\frac{4}{32} \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{6}{48} \quad \frac{5}{40} \quad \frac{7}{56}$$

$$\text{Din } 8 \cdot 24 = 64 \cdot 3, \text{ rezultă } \frac{8}{64} = \frac{3}{24}. \text{ Din } 2 \cdot 8 = 16 \cdot 1, \text{ rezultă } \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Din } 5 \cdot 56 = 40 \cdot 7, \text{ rezultă } \frac{5}{40} = \frac{7}{56}. \text{ Din } 6 \cdot 32 = 48 \cdot 4, \text{ rezultă } \frac{6}{48} = \frac{4}{32}.$$

Analog, se demonstrează că toate perechile de fracții care apar sunt echivalente,

$$\text{adică } \frac{8}{64} = \frac{3}{24} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{7}{56} = \frac{5}{40} = \frac{6}{48} = \frac{4}{32}.$$





Reținem

Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt echivalente și scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$, atunci fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ nu sunt echivalente și scriem $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Verificați dacă următoarele fracții sunt echivalente:

a) $\frac{8}{5}$ și $\frac{56}{35}$;

c) $\frac{21}{26}$ și $\frac{105}{130}$;

b) $\frac{36}{7}$ și $\frac{108}{28}$;

d) $\frac{64}{49}$ și $\frac{32}{24}$.

2. În tabelul de mai jos sunt înscrise, în kilograme, cantitățile de mere depozitate pentru iarnă de bunici.

Mere galbene	Mere roșii	Mere verzi
50	20	30

a) Scrieți în procente cantitatea de mere de fiecare tip, din totalul merelor.

b) Scrieți câte două fracții echivalente care să reprezinte cantitățile de mere de fiecare tip.

3. Pentru fiecare dintre fracțiile $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{10}{10}$ scrieți câte două fracții echivalente.

4. Verificați dacă următoarele perechi de fracții reprezintă fracții echivalente.

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{4}{8}$;

b) $\frac{7}{3}$ și $\frac{35}{15}$;

c) $\frac{2}{8}$ și $\frac{4}{15}$.

5. Scrieți toate fracțiile cu numitorul mai mic decât 25, echivalente cu fracția $\frac{7}{5}$.

6. Arătați că, dacă fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{a+1}{b+1}$ sunt echivalente, atunci $a = b$.



Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns.

(25 p) O fracție echivalentă cu $\frac{100}{60}$ este:

A. $\frac{25}{16}$;

B. $\frac{10}{9}$;

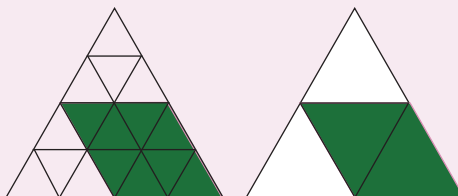
C. $\frac{5}{3}$;

D. $\frac{4}{3}$.

(2x25 p) 2. Verificați dacă următoarele perechi de fracții reprezintă fracții echivalente.

$\frac{2^3}{3^2}$ și $\frac{40}{45}$; $\frac{a}{5}$ și $\frac{4 \cdot a}{20}$.

(15 p) 3. Scrieți fracțiile echivalente reprezentate în imaginea de mai jos.



Se acordă 10 puncte din oficiu.



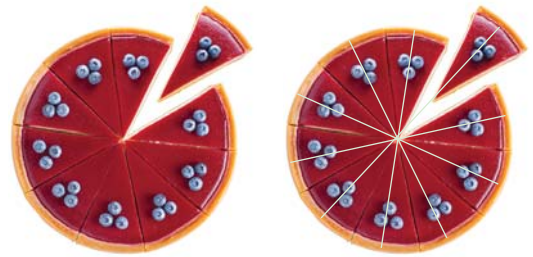
L3 Compararea fracțiilor

Într-o zi de vacanță, bunica Alexandrei a făcut o tartă cu fructe, preferata nepoatei. Bunica a tăiat tarta și au rezultat 10 porții egale, ca în prima din imaginile alăturate.

Alexandra își invitase colegii pentru a repeta, în curte, dansul pentru serbarea școlară. Era nevoie de *mai multe porții* de tartă. Bunica rezolvă imediat problema, spunând:

— Împărțim fiecare porție în două (ca în a doua imagine) și obținem 20 de porții.

— Ai dreptate, singurul dezavantaj este că obținem porții mai mici, a spus Alexandra.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

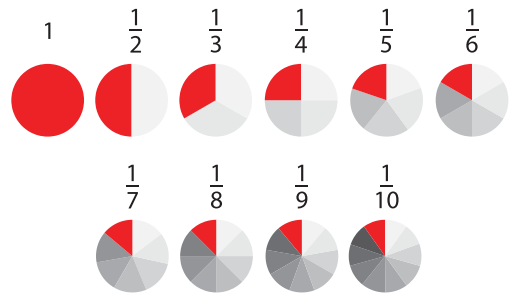
A compara fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ cu $b \neq 0$ și $d \neq 0$ înseamnă a stabili care dintre relațiile $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ are loc.

Același întreg poate fi împărțit în două sau mai multe părți egale, numite *unități fracționare*.

Imaginea alăturată, ca și problema despre tarta Alexandrei, ilustrează următorul fapt:

Cu cât *numărul părților* în care este împărțit întregul este *mai mare*, cu atât *unitatea fracționară* este *mai mică*.

Vom scrie: $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8} > \frac{1}{9} > \frac{1}{10} \dots$



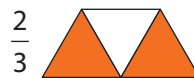
Acum suntem în măsură să identificăm două variante de a stabili care dintre două fracții reprezintă o cantitate mai mare (să *comparăm fracțiile*): În lecțiile următoare vom descoperi și tehnici mai avansate.

1. Considerăm aceeași unitate fracționară (fracțiile au *aceiași numitor*) și comparăm numărul unităților fracționare (*numărătorii fracțiilor*).
2. Considerăm același număr de unități fracționare (fracțiile au *aceiași numărător*) și comparăm *unitățile fracționare* (*numitorii fracțiilor*).

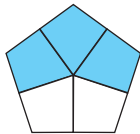
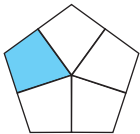
Compararea fracțiilor cu același numitor

Dacă două fracții au *aceiași numitor* (diferit de 0), atunci fracția mai mare este cea care are *numărătorul mai mare*.

Dacă $a < b$, atunci $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$, oricare ar fi n , număr natural, $n \neq 0$.

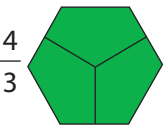
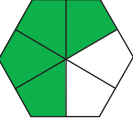
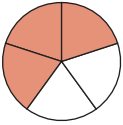
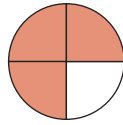


$\frac{2}{3} < \frac{4}{3}$ pentru că $2 < 4$.

<p>Dacă $a > b$, atunci $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$, oricare ar fi n, număr natural, $n \neq 0$.</p>		
	$\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$ pentru că $3 > 1$.	

Compararea fracțiilor ordinare care au același numărător

Dacă două fracții au *același numărător*, atunci este mai mare acea fracție care are *numitorul mai mic*.

<p>Dacă $a < b$, atunci $\frac{n}{a} > \frac{n}{b}$, oricare ar fi n, număr natural, $n \neq 0$, $a \neq 0$.</p>		
	$\frac{4}{3} > \frac{4}{6}$ pentru că $3 < 6$.	
<p>Dacă $a > b$, atunci $\frac{n}{a} < \frac{n}{b}$, oricare ar fi n, număr natural, $n \neq 0$, $b \neq 0$.</p>		
	$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$ pentru că $5 > 4$.	



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1:

Comparați fracțiile $\frac{17}{20}$ și $\frac{19}{18}$.

Pas 1. Comparați fracția $\frac{17}{20}$ cu fracția $\frac{19}{20}$.

Pas 2. Comparați fracția $\frac{19}{20}$ cu fracția $\frac{19}{18}$.

Pas 3. Stabiliți relația între fracțiile inițiale.

Soluție.

Pas 1. Din $17 < 19$, rezultă $\frac{17}{20} < \frac{19}{20}$.

Pas 2. Din $20 > 18$, rezultă $\frac{19}{20} < \frac{19}{18}$.

Pas 3. $\frac{17}{20} < \frac{19}{20}$ și $\frac{19}{20} < \frac{19}{18}$, rezultă $\frac{17}{20} < \frac{19}{18}$.

Aplicația 2:

Ne propunem să comparăm fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$ care nu au nici același numitor, nici același numărător.

Pas 1. Reprezentați prin desene fracțiile date.

Pas 2. Scrieți ca fracții partea care completează până la întreg, fiecare fracție dată.

Pas 3. Comparați fracțiile scrise la pasul 2.

Pas 4. Stabiliți relația dintre fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$.

Soluție.

Pas 1. 

Pas 2. Frația $\frac{3}{4}$ este completată până la întreg de $\frac{1}{4}$, iar fracția $\frac{4}{5}$ este completată până la întreg de $\frac{1}{5}$.

Pas 3. $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ pentru că au același numărător și $5 > 4$.

Pas 4. Este mai mare fracția care este completată până la întreg de o parte mai mică, deci $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile $<$, $=$, $>$ astfel încât să obțineți relații adevărate:

- a) $\frac{3}{10} \dots \frac{4}{10}$; d) $\frac{5}{5} \dots \frac{5}{3}$;
 b) $\frac{13}{8} \dots \frac{11}{8}$; e) $\frac{2^4}{75} \dots \frac{4^2}{75}$;
 c) $\frac{20}{9} \dots \frac{20}{11}$; f) $\frac{3}{9} \dots \frac{49}{147}$.

2. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Cea mai mică dintre fracțiile $\frac{23}{17}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{25}{17}$, $\frac{17}{17}$, $\frac{4}{17}$ este:

- A. $\frac{15}{17}$; B. $\frac{17}{17}$; C. $\frac{4}{17}$; D. $\frac{23}{17}$.

b) Dintre fracțiile $\frac{55}{4 \cdot 5}$, $\frac{55}{3 \cdot 6}$, $\frac{55}{2 \cdot 11}$, $\frac{55}{7 \cdot 3}$ cea mai mare este:

- A. $\frac{55}{7 \cdot 3}$; B. $\frac{55}{3 \cdot 6}$; C. $\frac{55}{4 \cdot 5}$; D. $\frac{55}{2 \cdot 11}$.

3. Comparați fracțiile:

- a) $\frac{19}{31}$ și $\frac{23}{31}$; c) $\frac{15}{11}$ și $\frac{15}{14}$;
 b) $\frac{18}{25}$ și $\frac{16}{25}$; d) $\frac{24}{5}$ și $\frac{24}{1}$.

4. Copiați pe caiete, apoi scrieți în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă:

Propoziția	A/F
$p_1: \frac{a}{30} < \frac{7}{30}$, pentru orice număr natural a , $a \leq 6$.	
$p_2: \frac{b}{10} > \frac{5}{10}$, pentru orice număr natural b , $b \geq 5$.	
$p_3: \frac{4^3}{8^2} = \frac{c}{c}$, oricare ar fi numărul natural nenul c .	

5. Scrieți:

a) două fracții mai mici decât $\frac{33}{40}$;

b) trei fracții mai mari decât $\frac{99}{35}$.

6. Determinați numărul natural n pentru fiecare dintre inegalitățile:

a) $\frac{19}{8} < \frac{n}{8} < \frac{23}{8}$;

b) $\frac{3^2}{16} < \frac{n+5}{16} < \frac{15}{16}$;

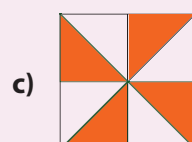
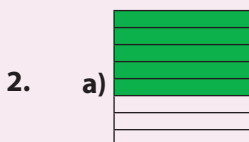
c) $\frac{10}{39} > \frac{10}{3 \cdot n} > \frac{10}{51}$.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- (20p) a) O fracție mai mică decât $\frac{7}{10}$ este: A. $\frac{7}{2}$; B. $\frac{15}{10}$; C. $\frac{3}{10}$; D. $\frac{7}{9}$.
 (20p) b) O fracție mai mare decât $\frac{20}{9}$ este: A. $\frac{20}{11}$; B. $\frac{17}{9}$; C. $\frac{20}{7}$; D. $\frac{4 \cdot 4}{9}$.



(15p) 2.) Scrieți fracțiile reprezentate de zonele colorate, știind că pătratele au laturile de aceeași lungime.

(20p) 2.) Precizați, argumentat, care este cea mai mică dintre cele trei fracții.

(15p) 3. Aflați toate numerele naturale n pentru care $\frac{4}{5} < \frac{4}{n+2}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L4 Reprezentarea pe axa numerelor a fracțiilor ordinare. Ordonarea fracțiilor ordinare



Ne amintim

Axa numerelor este o dreaptă pe care s-au fixat: punctul O , numit *originea* axei, segmentul OA , numit *unitatea de măsură* și sensul de parcurgere a dreptei OA , numit *sensul axei*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor, *unitatea de măsură* reprezintă un întreg.

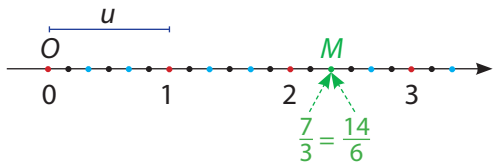
O *unitate fracționară* se reprezintă pe axă, împărțind unitatea de măsură în n părți egale și luând în considerare o astfel de parte, începând de la origine.

1. Frația $\frac{0}{n}$ se reprezintă în punctul $O(0)$, oricare ar fi numărul natural n .

2. Frațiile ordinare cu numitorul 1 și cele echivalente cu acestea se reprezintă în punctele corespunzătoare numerelor naturale.

3. Pentru a reprezenta fracția $\frac{a}{n}$, numărăm de la origine spre dreapta a unități fracționare (de a ori $\frac{1}{n}$).

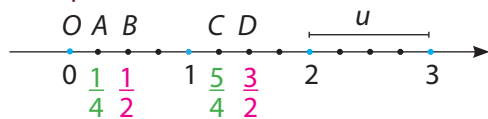
4. Două fracții echivalente se reprezintă pe axa numerelor în același punct.



$\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ și se reprezintă în același punct al axei.

5. Dacă două fracții nu sunt echivalente, atunci reprezentarea pe axă a fracției mai mici este situată în stânga reprezentării fracției mai mari.

Exemplu



$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ și punctul A este în stânga punctului B.

$\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ și punctul C este în stânga punctului D.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Observații. 1. Dacă două fracții nu au nici același numitor, nici același numărător, poziția reprezentărilor lor pe axă ne ajută să decidem care dintre fracții este mai mică și care este mai mare (să le *comparam*).

2. Dacă $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ și $\frac{c}{d} < \frac{m}{n}$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$, numitorii fracțiilor fiind numere naturale diferite de 0.

Reprezentarea pe axă a fracțiilor și compararea fracțiilor sunt instrumente utile pentru ordonarea unui șir de fracții ordinare.

A ordona *crescător* două sau mai multe fracții ordinare, înseamnă a le compara și a le scrie de la cea mai mică la cea mai mare.

Fie fracțiile $\frac{5}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}$. Comparăm fracțiile două câte două și

obținem: $\frac{2}{4} < \frac{2}{3}, \frac{2}{3} < \frac{5}{3}$. Ordonate *crescător*: $\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}$.

A ordona *descrescător* două sau mai multe fracții ordinare, înseamnă a le compara și a le scrie de la cea mai mare la cea mai mică.

Ordonate *descrescător*: $\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}$.



Aplicație

Ne propunem să comparăm fracțiile $\frac{12}{13}$ și $\frac{15}{14}$ care nu au nici același numitor, nici același numărător.

Pas 1. Scrieți întregul ca fracție cu numitorul 13.

Pas 2. Scrieți întregul ca fracție cu numitorul 14.

Pas 3. Comparați $\frac{12}{13}$ cu fracția scrisă la pasul 1, apoi cu cea scrisă la pasul 2.

Pas 4. Stabiliți relația dintre fracțiile $\frac{12}{13}$ și $\frac{15}{14}$.

Soluție.

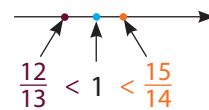
Pas 1. Întregul se poate scrie $\frac{13}{13}$.

Pas 2. Întregul se poate scrie $\frac{14}{14}$.

Pas 3. $\frac{12}{13} < \frac{13}{13}$, $\frac{13}{13} = \frac{14}{14} = 1$ și $\frac{15}{14} > \frac{14}{14}$.

Pas 4. Frația $\frac{12}{13}$ este mai mică decât întregul, iar fracția $\frac{15}{14}$

este mai mare decât întregul. În concluzie, $\frac{12}{13} < \frac{15}{14}$.



Observații. 1. Orice fracție subunitară este mai mică decât orice fracție echiunitară și decât orice fracție supraunitară.

2. Orice fracție supraunitară este mai mare decât orice fracție echiunitară și decât orice fracție subunitară.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. a) Desenați pe caiete axa numerelor, având unitatea de măsură de 3 cm.

b) Reprezentați, pe axa de la subpunctul a), fracțiile: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$.

2. a) Desenați pe caiete axa numerelor, având unitatea de măsură de 8 cm.

b) Reprezentați, pe axa de la subpunctul a), fracțiile: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{5}{4}$ și $\frac{9}{8}$.

3. Scrieți pe caiete fracțiile corespunzătoare punctelor A, B, C, D reprezentate pe axa numerelor în desenul următor.



4. Ordonăți crescător fracțiile, apoi precizați ordinea în care se află, pe axa numerelor, punctele prin care se reprezintă aceste fracții:

a) $\frac{10}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$.

b) $\frac{45}{97}$, $\frac{45}{14}$, $\frac{45}{23}$, $\frac{45}{17}$, $\frac{45}{22}$, $\frac{45}{1001}$.

5. Ordonăți descrescător fracțiile, apoi precizați ordinea în care se află, pe axa numerelor, punctele prin care se reprezintă aceste fracții:

a) $\frac{29}{20}$, $\frac{31}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{89}{20}$, $\frac{0}{20}$.

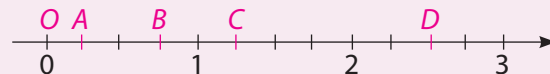
b) $\frac{38}{83}$, $\frac{38}{9}$, $\frac{38}{37}$, $\frac{38}{55}$, $\frac{38}{17}$, $\frac{38}{75}$.



Minitest

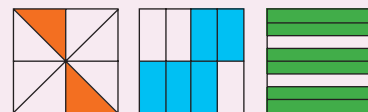
(40p) 1. Ordonăți crescător fracțiile: $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{9}$.

(20p) 2. Precizați fracțiile care sunt reprezentate în figura alăturată prin punctele A, B, C, D.



(30p) 3. Scrieți fracțiile care reprezintă suprafețele colorate și ordonați crescător aceste fracții, știind că pătratele au aceleași dimensiuni.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L5 Scoaterea întregilor din fracție, introducerea întregilor în fracție

De ziua lui, Darius dorește să le ofere colegilor, părinților și fratelui său câte o ciocolată, în total 24 de bucăți de ciocolată. El cere vânzătoarei două cutii întregi și patru zecimi din a treia. Claudiu îl întreabă pe Darius:

— Nu trebuia să iei 24 de bucăți?

Darius spune:

— Sigur, dar în fiecare cutie sunt exact 10 bucăți, adică fiecare ciocolată reprezintă o zecime din cutia întregă. Douăzeci și patru de zecimi înseamnă două cutii întregi a câte 10 bucăți și încă 4 bucăți din a treia cutie.



Scriem $\frac{24}{10} = 2 + \frac{4}{10}$ sau $\frac{24}{10} = 2\frac{4}{10}$
2 cutii *întregi* și 4 *zecimi* de cutie



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Fie n un număr natural nenul. *Fracțiile supraunitare* cu numitorul n , unde n este un număr natural nenul, se obțin luând în considerare un număr m de unități fracționare, cu $m > n$. Folosind teorema împărțirii cu rest, pentru numerele naturale m (deîmpărțit) și n (împărțitor), există c (cât) și r (rest), numere naturale, cu $r < n$, astfel încât $m = n \cdot c + r$.

Dacă $m = n \cdot c + r$, atunci fracția $\frac{m}{n}$ reprezintă c întregi și încă r unități fracționare.

Fracția $\frac{m}{n}$ se poate scrie în una din formele $\frac{n \cdot c + r}{n}$ sau $c\frac{r}{n}$ (c întregi și r supra n).

În practică, se folosește avantajos una din cele două forme de scriere, în funcție de cerința problemei.



Reținem

1. Dacă fracția este dată în forma $\frac{m}{n}$ și $m = n \cdot c + r$, $r < n$, scrierea $\frac{m}{n} = c\frac{r}{n}$ se numește *scoaterea întregilor din fracție*.
2. Dacă fracția este dată în forma $c\frac{r}{n}$, atunci scrierea $c\frac{r}{n} = \frac{n \cdot c + r}{n}$ se numește *introducerea întregilor în fracție*.

Exemplu:

Reprezentare	Scriere/citire		
	Scoaterea întregilor din fracție 		
	$\frac{23}{4}$	23 de <i>pătrimi</i>	$\frac{23}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{4} = 5\frac{3}{4}$
	Introducerea întregilor în fracție 		
	$5\frac{3}{4}$	5 <i>întregi</i> și 3 <i>pătrimi</i>	$5\frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{23}{4}$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exerițiu rezolvat:

Cerința	Rezolvare	Răspuns
a) Scoateți întregii din fracția $\frac{29}{11}$.	Câtul împărțirii numărului 29 la 11 este 2, iar restul este 7. Atunci, $\frac{29}{11} = \frac{11 \cdot 2 + 7}{11} = 2\frac{7}{11}$.	$\frac{29}{11} = 2\frac{7}{11}$.
b) Introduceți întregii în fracția $9\frac{3}{7}$.	9 întregi reprezintă $9 \cdot 7$ unități fracționare. Atunci, $9\frac{3}{7} = \frac{9 \cdot 7 + 3}{7} = \frac{66}{7}$.	$9\frac{3}{7} = \frac{66}{7}$.

Problemă rezolvată. Ioana desenează pe caietul de matematică o semidreaptă cu originea punctul O , iar pe aceasta punctul A , astfel încât $OA = 16$ cm.

Începând cu punctul O , marchează pe semidreaptă puncte din trei în trei cm. Imaginea alăturată simulează desenul Ioanei.



- Precizați numărul segmentelor cu lungimea de 3 cm, situate între punctele O și A .
- Considerând unitatea de măsură un segment de 3 cm, scrieți fracția corespunzătoare lungimii segmentului OA .
- Exprimați fracția de la subpunctul b) în forma $a\frac{b}{c}$, cu a, b, c numere naturale nenule, a cel mai mare posibil.

Rezolvare.

- $16 = 3 \cdot 5 + 1$, deci sunt 5 segmente de lungime 3 cm.
- Fiecare segment de 3 cm reprezintă un *întreg*, divizat în *treimi*. Segmentul OA este format din 16 astfel de diviziuni, adică din 16 *treimi*. Atunci, fracția corespunzătoare segmentului OA este $\frac{16}{3}$.
- $\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Scoțând întregii din fracția $\frac{23}{5}$, se obține:

- A. $4\frac{5}{3}$; B. $5\frac{1}{5}$; C. $4\frac{3}{5}$; D. $5\frac{2}{5}$.

b) Prin introducerea întregilor în fracția $6\frac{2}{3}$, se obține:

- A. $\frac{15}{2}$; B. $\frac{20}{3}$; C. $\frac{22}{3}$; D. $\frac{23}{3}$.

c) Numărul natural n pentru care $n < \frac{44}{7} < n + 1$, este:

- A. 7; B. 8; C. 5; D. 6.

2. a) Determinați numărul natural a , pentru care

$$\frac{31}{6} = a\frac{1}{6}.$$

b) Determinați numărul natural b pentru care

$$4\frac{b}{9} = \frac{43}{9}.$$

c) Calculați suma $c + d$, știind că $1\frac{2}{c+3} = \frac{d}{10}$.

3. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere forma obținută după scoaterea întregilor din fracții, folosind modelul.

$\frac{13}{6}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{23}{5}$	$\frac{57}{8}$	$\frac{70}{10}$	$\frac{164}{25}$	$\frac{233}{233}$
$\frac{13}{6} = \frac{6 \cdot 2 + 1}{6} = 2\frac{1}{6}$							

4. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere forma obținută după introducerea întregilor în fracții, folosind modelul.

$1\frac{3}{5}$	$2\frac{7}{9}$	$4\frac{3}{10}$	$10\frac{9}{25}$	$2\frac{1}{n+2}$	$\frac{70}{10}$	$\frac{164}{25}$	$\frac{233}{233}$
$1\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 1 + 3}{5} = \frac{8}{5}$							

5. Reprezentați pe axa numerelor fracția $\frac{15}{4}$, folosind o unitate de măsură convenabilă. Identificați două numere naturale consecutive n și $n + 1$ astfel încât $n < \frac{15}{4} < n + 1$.

6. Pentru fiecare dintre fracțiile date, precizați câte două numere consecutive, între care aceasta este situată, folosind modelul următor.

Model: $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$, deci $2 < 2\frac{1}{5} < 3$.

- a) $\frac{13}{4}$; d) $\frac{94}{36}$; g) $\frac{34}{5}$;
b) $\frac{23}{7}$; e) $\frac{101}{25}$; h) $\frac{48}{7}$;
c) $\frac{79}{11}$; f) $\frac{492}{20}$; i) $\frac{151}{3}$;

- j) $\frac{54}{11}$; k) $\frac{301}{4}$; l) $\frac{64}{31}$.

7. Copiați pe caiete și completați în spațiile libere unul dintre simbolurile $<$, $=$ sau $>$, astfel încât să obțineți enunțuri adevărate:

- a) $3\frac{3}{4} \dots \frac{17}{4}$; c) $\frac{37}{8} \dots 4\frac{7}{8}$;
b) $3\frac{2}{5} \dots \frac{16}{5}$; d) $\frac{123}{10} \dots 12\frac{3}{10}$.

8. Într-un vas încap 7 cani și trei sferturi de apă. Exprimați printr-o fracție, cantitatea de apă din vas, considerând ca unitate de măsură o cană plină.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- (15p) a) Dintre fracțiile următoare, are cei mai mulți întregi:

- A. $\frac{135}{2}$; B. $\frac{245}{4}$; C. $\frac{468}{7}$; D. $\frac{1357}{21}$.

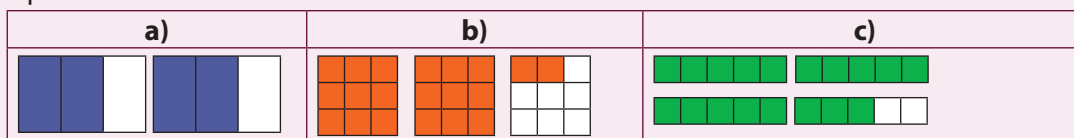
- (20p) b) Introducând întregii în fracția $a\frac{1}{b}$, se obține $\frac{201}{50}$. Atunci, $a + b$ este:

- A. 52; B. 54; C. 53; D. 51.

- (20p) 2. a) Determinați numărul natural a , pentru care $\frac{51}{7} = a\frac{2}{7}$.

- (20p) b) Determinați numărul natural b pentru care $4\frac{b}{11} = \frac{49}{11}$.

- (15p) 3. Exprimați în forma $a\frac{b}{c}$ suprafețele colorate din următoarele reprezentări, a fiind cel mai mare posibil:



Se acordă 10 puncte din oficiu.



L6 Cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere naturale



Ne amintim

Dacă numerele naturale a , b și d verifică relațiile $d|a$ și $d|b$, atunci numărul d este *divizor comun* al numerelor a și b .

Observații

a) Numărul 1 este *divizor comun* al tuturor numerelor naturale nenule.

b) Dacă d este *divizor comun* al numerelor naturale nenule a și b , atunci $d \leq a$ și $d \leq b$.

Din $d|a$, rezultă $a = d \cdot x$, cu $x \geq 1$, deci $d \leq a$.

Din $d|b$, rezultă $b = d \cdot y$, cu $y \geq 1$, deci $d \leq b$.

Exemple. 3 este *divizor comun* al numerelor 15 și 21 pentru că $3|15$ și $3|21$.

a) $1|1$; $1|2$; $1|4$; $1|5$; ..., $1|n$...

b) $d|16$ și $d|8$, deci $d \leq 16$ și $d \leq 8$.
 $d|18$ și $d|9$ rezultă că $d \leq 18$ și $d \leq 9$.

Observație.

Un *divizor comun* al numerelor a și b este mai mic sau egal cu cel mai mic dintre ele.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pentru un proiect școlar, elevii claselor a V-a A și a V-a D, se organizează în echipe cu *aceiași număr de membri*. În clasa a V-a A sunt 24 de elevi, iar în clasa a V-a D sunt 18 de elevi.

a) Aflați *numărul membrilor* pe care îi poate avea o echipă, știind că *toți elevii participă* la proiect, *fiecare într-o singură echipă* și că echipele sunt formate din elevi ai *aceleiași clase*.

b) Aflați numărul *cel mai mare* de membri pe care îi poate avea o echipă, în condițiile subpunctului a).



Rezolvare

a) Fiecare clasă formează un număr de echipe. *Numărul membrilor* unei echipe este un *divizor* al numărului total de elevi din clasă. Cum toate echipele au *aceiași număr* de membri, rezultă că acest număr este un *divizor comun* al numerelor 24 și 18.

Divizorii numărului 24 sunt: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24. Divizorii numărului 18 sunt: 1; 2; 3; 6; 9; 18.

În concluzie, o echipă poate avea 2 membri, 3 membri sau 6 membri.

b) Pentru a afla *cel mai mare număr* de membri pe care îi poate avea o echipă, este suficient să alegem *cel mai mare* dintre numerele 2, 3 și 6, adică dintre *divizorii comuni* ai celor două numere.

În concluzie, o echipă are 6 membri.

Se numește *cel mai mare divizor comun* al numerelor naturale nenule a și b , *cel mai mare număr natural nenul* d , cu proprietatea că d este *divizor comun* al numerelor a și b .

Cel mai mare divizor comun al *mai multor numere* este cel mai mare număr natural care este *divizor comun* al tuturor acestor numere.

Exemplu:

Divizorii numărului 4 sunt: 1, 2, 4.

Divizorii numărului 6 sunt: 1, 2, 3, 6.

Divizorii comuni ai numerelor 4 și 6 sunt 1 și 2, iar $1 < 2$, deci *cel mai mare divizor comun* al numerelor 4 și 6 este 2.

Exemplu: *Cel mai mare divizor comun* al numerelor 6, 9 și 51 este 3 pentru că divizorii comuni ai numerelor 6, 9, 51 sunt 1 și 3, iar cel mai mare este 3.

Observație. Dacă dorim să facem economie de spațiu, expresia *cel mai mare divizor comun* se poate prescurta în forma c.m.m.d.c.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Problemă rezolvată

Aflați cel mai mare divizor comun al numerelor:

- a) 23 și 31; b) 9 și 27; c) 19 și 32; d) 100 și 175.

Rezolvare.

- a) 23 și 31 sunt numere prime, deci au doar divizori improprii. Singurul lor divizor comun este 1, deci *cel mai mare divizor comun* al numerelor 23 și 31 este 1.
- b) 9 are divizorii: 1, 3, 9, iar 27 are divizorii: 1, 3, 9, 27. Divizorii comuni ai numerelor 9 și 27 sunt 1, 3, 9. Cum $1 < 3 < 9$, rezultă *cel mai mare divizor comun* al numerelor 9 și 27 este 9.
- c) 19 are divizorii: 1, 19, iar 32 are divizorii: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Cele două numere au un singur divizor comun și *cel mai mare divizor comun* al numerelor 19 și 32 este 1.
- d) Divizorii numărului 100 sunt: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, iar divizorii numărului 175 sunt: 1, 5, 7, 25, 35, 175. Divizorii comuni sunt: 1, 5, 25. Cum $1 < 5 < 25$, rezultă *cel mai mare divizor comun* al numerelor 100 și 175 este 25.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Un divizor comun al numerelor 24 și 36 este:
A. 8; B. 9; C. 6; D. 16.
 - Cel mai mare divizor comun* al numerelor 24 și 36 este:
A. 24; B. 12; C. 6; D. 8.
 - Două numere care au *cel mai mare divizor comun* numărul 8, sunt:
A. 16 și 12; C. 8 și 12;
B. 32 și 48; D. 24 și 32.
- a) Scrieți divizorii comuni ai numerelor 12 și 18.
b) Precizați *cel mai mare divizor comun* al numerelor 12 și 18.
- Aflați cifra x , știind că *cel mai mare divizor comun* al numerelor 40 și $2x$ este numărul 5.
- Copiați tabelul pe caiete, calculați *cel mai mare divizor comun* al numerelor indicate și completați rezultatul în caseta corespunzătoare.
- Fie numerele de forma $\overline{a5}$ și $\overline{5a}$. Scrieți toate perechile de numere de această formă care:
 - nu au divizori comuni diferiți de 1;
 - cel mai mare divizor comun* este un număr format dintr-o singură cifră;
 - cel mai mare divizor comun* este un număr format din două cifre.
- Scrieți câte două exemple de numere pentru care *cel mai mare divizor comun* este:
 - 12; c) 20; e) 32;
 - 15; d) 24; f) 50.
- Copiați pe caiete, apoi scrieți în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă:

Propoziția	A/F
p_1 : Cel mai mare divizor comun al numerelor 24 și 32 este 12.	
p_2 : 30 este cel mai mare divizor comun al numerelor 60 și 90.	
p_3 : Cel mai mare divizor comun al numerelor 12, 18 și 36 este 12.	
p_4 : Cel mai mare divizor comun al numerelor 48 și 60 este 6.	



L7 Amplificarea fracțiilor ordinare. Simplificarea fracțiilor ordinare

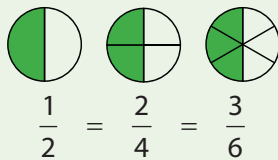


Ne amintim

Două fracții care reprezintă aceeași parte din întreg se numesc *fracții echivalente*.

Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $a \cdot d = b \cdot c$.

Dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0, d \neq 0$.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ și } 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2;$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ și } 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3;$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \text{ și } 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3.$$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Să observăm că $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ și că $\frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$. De asemenea, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ și $\frac{3}{6} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}$.

Am identificat astfel, un instrument prin care putem găsi o infinitate de *fracții echivalente* (înmulțind și numărătorul și numitorul cu un număr natural nenul).

Considerăm fracția $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale, b diferit de 0.

A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul p înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul cu numărul p .

$$\text{Scriem } \frac{p \cdot a}{p \cdot b} = \frac{p \cdot a}{p \cdot b}.$$

Observație. Prin *amplificarea* unei fracții cu un număr natural nenul se obține o *fracție echivalentă* cu cea inițială.

Exemplu:

$${}^2)\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}; \quad {}^3)\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15}; \quad {}^4)\frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20};$$

Din fracția $\frac{3}{5}$ putem obține o infinitate de fracții echivalente, amplificând-o cu numere naturale nenule, distincte.

Observăm, de asemenea, că $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ și că $\frac{1}{2} = \frac{3:3}{6:3}$ deci $\frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3}$.

Deducem că putem obține *fracții echivalente* și prin *împărțirea* numărătorului și numitorului cu un număr natural nenul. Apare condiția ca numărătorul și numitorul să se împartă exact la acest număr.

A *simplifica* o fracție cu un număr natural nenul d , divizor comun al numitorului și numărătorului, $d \neq 1$, înseamnă a împărți și numărătorul și numitorul la d .

$$\text{Scriem } \frac{a^{(d)}}{b} = \frac{a:d}{b:d}.$$

Exemple:

1. Frația $\frac{6}{10}$ se poate simplifica prin 2 pentru că $2|6$,

$$2|10 \text{ și obținem } \frac{6^{(2)}}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}.$$

2. Pentru a simplifica fracția $\frac{12}{18}$, există 3 posibilități, deoarece numerele 12 și 18 au trei divizori comuni,

$$\text{diferiți de 1 și anume: } 2, 3, 6. \quad \frac{12^{(2)}}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}; \quad \frac{12^{(3)}}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}; \quad \frac{12^{(6)}}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}.$$

Simplificând prin 2 sau prin 3, obținem fracții care *se mai pot simplifica* (fracții reducibile):

$$\frac{6^{(3)}}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3} \text{ iar } \frac{4^{(2)}}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}.$$

Simplificând prin 6, adică prin *cel mai mare divizor comun* al numerelor 12 și 18, obținem o fracție care *nu se mai poate simplifica* (fracție ireductibilă). *Cel mai mare divizor comun* al numerelor 2 și 3 este 1, deci fracția $\frac{2}{3}$ nu se poate simplifica.

O fracție ordinară care nu se poate simplifica se numește *fracție ireductibilă*.

O fracție ordinară care se poate simplifica se numește *fracție reducibilă*.



Reținem

1. Prin simplificarea unei fracții cu un număr natural nenul se obține o fracție echivalentă cu cea inițială.
2. Numărul fracțiilor echivalente cu fracția $\frac{a}{b}$, cu a și b naturale nenule, care se pot obține prin simplificarea fracției, este egal cu *numărul divizorilor comuni*, diferiți de 1, ai numerelor a și b .



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Frația $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale nenule, este *ireductibilă* doar dacă *cel mai mare divizor comun* al numerelor a și b este 1. Frația $\frac{2}{3}$ este *ireductibilă* pentru că numerele naturale 2 și 3 *nu au un divizor comun* diferit de 1.

2. Pentru a exprima o fracție ordinară sub formă de *fracție ireductibilă*, se recomandă *simplificarea* acesteia prin *cel mai mare divizor comun* al numerelor a și b . Pentru a scrie fracția $\frac{16}{40}$ sub formă de fracție *ireductibilă*, o simplificăm prin *cel mai mare divizor comun* al numerelor 16 și 40, adică prin 8 și obținem $\frac{16^{(8)}}{40} = \frac{16:8}{40:8} = \frac{2}{5}$, care este fracție *ireductibilă*, deoarece *cel mai mare divizor comun* al numerelor 2 și 5 este 1.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Amplificați cu 4 fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{5}{7}, \frac{17}{9}, \frac{15}{1}, \frac{0}{10}, \frac{25}{33}$.
2. Simplificați prin 5 fracțiile: $\frac{5}{5}, \frac{15}{10}, \frac{125}{70}, \frac{75}{140}$.
3. Simplificați prin 11 fracțiile: $\frac{220}{77}, \frac{110}{11 \cdot 7}, \frac{121}{77}, \frac{143}{1573}$.
4. Simplificați fiecare dintre următoarele fracții prin *cel mai mare divizor comun* al numărătorului și numitorului: $\frac{33}{9}, \frac{8}{28}, \frac{30}{20}, \frac{42}{49}, \frac{48}{54}$.
5. Obțineți fracții ireductibile prin simplificare (puteți face mai multe simplificări *successive*): $\frac{18}{12}, \frac{24}{40}, \frac{28}{70}, \frac{132}{88}, \frac{625}{125}, \frac{484}{440}$.

6. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Cel mai mic număr natural cu care trebuie amplificată fracția $\frac{12}{7}$, pentru a obține o fracție cu numărătorul pătrat perfect, este:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 6.

b) Cel mai mic număr natural prin care trebuie simplificată fracția $\frac{60}{36}$, pentru a obține o fracție cu numitorul număr prim, este:

A. 2; B. 3; C. 18; D. 12.

c) Numărul a din egalitatea $\frac{5}{9} = \frac{40}{72}$ este:

A. 10; B. 9; C. 8; D. 7.

d) Numărul b din egalitatea $\frac{104}{65} = \frac{8}{5}$ este:

A. 13; B. 12; C. 14; D. 16.

7. Copiați pe caiete, apoi completați spațiile libere pentru a obține răspunsul corect.

a) Dacă prin amplificarea fracției $\frac{a}{b}$ se obține fracția $\frac{45}{55}$, atunci $\frac{a}{b} = \dots$

b) Simplificând fracția $\frac{63}{28}$, se obține fracția ireductibilă ...

8. Mihnea a scris pe caiet o fracție, a amplificat-o, apoi a șters fracția inițială, lăsând doar rezultatul $\frac{1133}{22}$. Aflați ce fracție a scris Mihnea și precizați numărul cu care s-a amplificat fracția.

9. Scrieți:

a) toate fracțiile subunitare ireductibile, care au numitorul 20;

b) toate fracțiile supraunitare reductibile, care au numărătorul 18.

10. Determinați:

a) fracțiile de forma $\frac{5a}{14}$, care se simplifică prin 2;

b) fracțiile de forma $\frac{2b}{35}$, care se simplifică prin 5;

11. Determinați cifrele a și b astfel încât fracția $\frac{23a}{5b6}$

să se poată simplifica prin 3.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(20p) a) Cel mai mare divizor comun al numerelor 45 și 54 este:

A. 9; B. 3; C. 6; D. 15.

(20p) b) Amplificând fracția $\frac{17}{21}$ cu 9, se obține:

A. $\frac{163}{189}$; B. $\frac{153}{198}$; C. $\frac{163}{198}$; D. $\frac{153}{189}$.

(20p) c) Frația ireductibilă care se obține simplificând $\frac{216}{324}$, este:

A. $\frac{4}{3}$; B. $\frac{3}{4}$; C. $\frac{2}{3}$; D. $\frac{2}{4}$.

(10p) 2. Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{3 \cdot n + 2}{22}$ este subunitară și ireductibilă.

(10p) 3. a) Scrieți divizorii numărului 15.

(10p) b) Determinați fracțiile reductibile de forma $\frac{7aa}{15}$ și apoi simplificați fracțiile obținute.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L8 Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun



Ne amintim

Dacă numerele naturale m , a și b verifică relațiile $m : a$ și $m : b$, atunci numărul m este *multiplu comun* al numerelor a și b .

Observație. Numărul 0 este *multiplu comun* al tuturor numerelor naturale.

36 este *multiplu comun* al numerelor 12 și 9 pentru că $36 : 12$ și $36 : 9$,
 $0 : a$, oricare ar fi numărul natural a .



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Numărul elevilor din clasa Mariei, care participă la cursul opțional de *matematică distractivă* este **cel mai mic** număr natural pentru care se pot forma echipe de câte 3 elevi, de câte 6 elevi și de câte 9 elevi, în fiecare caz fiind cuprinși toți elevii.

Aflați câți elevi frecventează acest curs.

Soluție. Fie n numărul participanților la curs. Toți elevii pot fi grupați câte 3, deci n se divide la 3.



În mod analog, rezultă că n se divide la 6 și n se divide la 9. Prin urmare, n este un multiplu comun nenul al numerelor 3, 6, 9.

Multiplii nenuli ai lui 3 sunt: 3, 6, 9, 12, 15, **18**, 21, 24, 27, 30, 33, **36**, ...

Multiplii nenuli ai lui 6 sunt: 6, 12, **18**, 24, 30, **36**, 42, 48, **54**, ..

Multiplii nenuli ai lui 9 sunt: 9, **18**, 27, **36**, 45, **54**, 63, ...

Sunt multipli comuni nenuli ai celor trei numere: **18, 36, 54**, ...

Cel mai mic dintre *multiplii comuni* identificați este numărul **18**, deci la cursul opțional participă 18 elevi din clasa Mariei.

Se numește *cel mai mic multiplu comun* al numerelor naturale nenule a și b , **cel mai mic număr natural nenul** m cu proprietatea că m este **multiplu comun** al numerelor a și b .

Exemplu: Multiplii nenuli ai numărului 4 sunt: 4, 8, 12, 16, 20, 24, **28**, 32, 36, 40, 44, 48, 52, **56**, 60, 64, 68, 72, 76, 80, **84**, 86,

Multiplii nenuli ai numărului 14 sunt: 14, **28**, 42, **56**, 70, **84**,

Multiplii comuni ai numerelor 4 și 14 sunt: **28, 56, 84, 112**, ..., cel mai mic dintre aceste numere fiind **28**.

În concluzie, *cel mai mic multiplu comun* al numerelor 4 și 14 este 28.

Observație. *Cel mai mic multiplu comun* al *mai multor numere* este cel mai mic număr natural care este multiplu comun al tuturor acestor numere.

Exemplu: *Cel mai mic multiplu comun* al numerelor 15, 9 și 10 este 90. Pentru că: Multiplii nenuli ai lui 15 sunt: 15, 30, 45, 60, **90**,

Multiplii nenuli ai lui 9 sunt: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, **90**,

Multiplii nenuli ai lui 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, **90**,

Cel mai mic dintre multiplii comuni ai numerelor 15, 9, 10 este **90**.

Observație. Dacă dorim să facem economie de spațiu, expresia *cel mai mic multiplu comun* se poate prescurta în forma c.m.m.m.c.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Considerăm fracțiile: $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$.

a) Amplificați fracția $\frac{3}{4}$ cu 5.

b) Amplificați fracția $\frac{4}{5}$ cu 4.

c) Comparați fracțiile obținute la subpunctele

a) și b), apoi stabiliți relația între $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$,

Soluție. a) $\frac{3}{4} \stackrel{5)}{=} \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

b) $\frac{4}{5} \stackrel{4)}{=} \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{16}{20}$.

c) Cum fracțiile au același numitor și $15 < 16$, rezultă $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$.

Din $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ și $\frac{15}{20} < \frac{16}{20}$, rezultă $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$.

Numitorul comun al celor două fracții este chiar *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor fracțiilor inițiale.

Scrierea fracțiilor sub formă de fracții echivalente cu cele inițiale, dar care au același numitor, se numește *aducerea fracțiilor la același numitor sau aducerea fracțiilor la numitor comun*.

1. Frațiile pot fi aduse la numitor comun amplificând fiecare din cele două fracții cu numitorul celeilalte.

Numitorul comun obținut este un *multiplu comun* al numitorilor fracțiilor inițiale, nu neapărat *cel mai mic multiplu comun*.

2. În practică, este avantajos să lucrăm cu numere cât mai mici.

a) Aducem fracțiile la formă ireductibilă.

b) Identificăm *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor, apoi amplificăm fracțiile astfel încât numitorul comun să fie numărul identificat.

Exemplu. Dorim să aducem fracțiile $\frac{5}{6}$ și $\frac{6}{20}$ la numitor comun.

1. Amplificăm fracțiile cu 20, respectiv cu 6 și vom obține fracții echivalente cu cele inițiale, dar cu numitorul comun $6 \cdot 20 = 120$.

$$\stackrel{20)}{\frac{5}{6}} = \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 20} = \frac{100}{120}; \quad \stackrel{6)}{\frac{6}{20}} = \frac{6 \cdot 6}{20 \cdot 6} = \frac{36}{120}$$

120 este un multiplu comun al numerelor 6 și 20.

2. a) Frația $\frac{5}{6}$ este *ireductibilă*. Simplificăm a doua fracție prin 2 și

obținem $\frac{6}{20} \stackrel{(2)}{=} \frac{6:2}{20:2} = \frac{3}{10}$, care este fracție ireductibilă.

b) *Cel mai mic multiplu comun* al numerelor 6 și 10 este 30.

Amplificăm fiecare fracție cu câtul împărțirii lui 30 la numitorul acesteia. $30 : 6 = 5$ și $30 : 10 = 3$.

Amplificăm cu 5 prima fracție și cu 3 cea de-a doua fracție.

$$\stackrel{5)}{\frac{5}{6}} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{25}{30}; \quad \stackrel{3)}{\frac{3}{10}} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{9}{30}. \text{ Prin urmare, } \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \text{ și } \frac{6}{20} = \frac{9}{30}.$$

Aplicând tehnica de la subpunctul 2, obținem fracții cu același numitor, cu proprietatea că *numitorul lor comun este cel mai mic multiplu comun* al numitorilor fracțiilor, scrise în formă ireductibilă (fracțiile au cel mai mic numitor comun posibil).



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Un multiplu comun al numerelor 8 și 12 este:

A. 40; **B.** 56; **C.** 48; **D.** 60.

b) Cel mai mic multiplu comun al numerelor 8 și 12 este:

A. 4; **B.** 24; **C.** 48; **D.** 36.

c) Aduse la cel mai mic numitor comun, fracțiile

$\frac{1}{10}$ și $\frac{2}{15}$, devin:

A. $\frac{1}{60}$ și $\frac{2}{60}$;

C. $\frac{2}{20}$ și $\frac{4}{20}$;

B. $\frac{6}{60}$ și $\frac{8}{60}$;

D. $\frac{3}{30}$ și $\frac{4}{30}$.

2. Copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere *cel mai mic multiplu comun* al numerelor indicate.

Numerele	12 și 18	20 și 35	21 și 30
Cel mai mic multiplu comun			
Numerele	32 și 48	75 și 100	15 și 16
Cel mai mic multiplu comun			

3. a) Scrieți multiplii de două cifre ai numerelor 9 și 12.
 b) Precizați *cel mai mic multiplu comun* al numerelor 9 și 12.
4. Determinați *cel mai mic multiplu comun* pentru următoarele grupuri de numere:
 a) 27 și 36; c) 75 și 50;
 b) 28 și 42; d) 8, 12 și 40.
5. Se consideră fracțiile $\frac{1}{15}$ și $\frac{3}{20}$.
 a) Amplificați prima fracție cu 4 și a doua fracție cu 3;
 b) Comparați fracțiile obținute.

6. Aflați *cel mai mic multiplu comun* al numitorilor fracțiilor, apoi aduceți fracțiile la același numitor:

a) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{4}$; c) $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$; e) $\frac{3}{14}$ și $\frac{2}{21}$;
 b) $\frac{2}{3}$ și $\frac{5}{9}$; d) $\frac{7}{6}$ și $\frac{7}{8}$; f) $\frac{n}{9}$ și $\frac{n}{12}$.

7. Aduceți la același numitor fracțiile:

a) $\frac{1}{5^{10}}$ și $\frac{1}{5^{13}}$; b) $\frac{27}{3^{15}}$ și $\frac{7}{3^{12}}$; c) $\frac{3}{2^{20}}$ și $\frac{1}{4^7}$.

8. Aduceți fracțiile $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{23}{36}$, $\frac{11}{18}$ la același numitor, apoi ordonați-le crescător.

9. La un turneu de șah participă mai mulți jucători, fiecare jucând același număr de partide.



Adrian a câștigat $\frac{7}{8}$ din partidele jucate, Cosmin

a câștigat $\frac{3}{4}$ din partidele jucate, iar Horia a

câștigat $\frac{2}{3}$ din partidele jucate.

- a) Scrieți sub formă de fracții cu același numitor partea pe care o reprezintă numărul partidelor câștigate de fiecare jucător, din numărul total al partidelor jucate.

- b) Aflați care dintre cei trei jucători a câștigat cele mai multe partide.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(20p) a) *Cel mai mic multiplu comun* al numerelor 45 și 75 este:

A. 150; B. 300; C. 225; D. 175.

(20p) b) Aduse la același numitor, fracțiile $\frac{2}{21}$ și $\frac{3}{14}$ devin:

A. $\frac{2}{21}$ și $\frac{6}{21}$; B. $\frac{4}{42}$ și $\frac{3}{42}$; C. $\frac{4}{42}$ și $\frac{9}{42}$; D. $\frac{2}{21}$ și $\frac{3}{21}$.

(20p) 2. Aduceți fracțiile $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{19}{24}$ la același numitor, apoi ordonați-le descrescător.

(20p) 3. a) Aflați *cel mai mic multiplu comun* al numerelor 6, 9 și 12.

(10p) b) Mihai își propune să rezolve un număr de probleme de aritmetică. Astfel, luni rezolvă $\frac{1}{6}$ din probleme, marți rezolvă $\frac{2}{9}$ din numărul total de probleme, iar miercuri rezolvă $\frac{5}{12}$ din numărul total de probleme. Precizați în ce zi a rezolvat Mihai cele mai multe probleme de aritmetică.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



Test de evaluare / autoevaluare

I. Stabiliți pe foaia de test sau pe caiet și completați în caseta liberă litera A, dacă propoziția este adevărată și litera F, dacă propoziția este falsă.

(5p) 1. În șirul $\frac{2}{3}, \frac{11}{8}, \frac{23}{32}, \frac{37}{29}, \frac{73}{58}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{131}{5^3}, \frac{abc}{99}$ sunt patru fracții supraunitare.

(5p) 2. Se pot obține trei fracții de forma $\frac{ab}{cd}$, echivalente cu fracția $\frac{23}{9}$.

(5p) 3. Dacă, după simplificare, fracția $\frac{48}{a}$ devine $\frac{6}{7}$, atunci a este 54.

(5p) 4. Introducând întregii în fracție, $7\frac{8}{9}$ devine $\frac{73}{9}$.

II. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

(5p) 1. Valoarea lui x pentru care fracția $\frac{12}{x+7}$ devine număr natural este:
A. 17; **B.** 4; **C.** 5; **D.** 1.

(5p) 2. Amplificând fracția $\frac{b}{b+1}$ cu un număr mai mare ca 1, se obține fracția $\frac{10}{12}$. Numărul b este:
A. 5; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 3.

(5p) 3. Numărul natural mai mare ca 1, prin care se poate simplifica fracția $\frac{55}{198}$, este:
A. 5; **B.** 55; **C.** 9; **D.** 11.

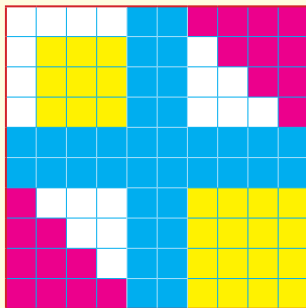
III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

(15p) 1. a) Pe axa numerelor cu originea punctul O și unitatea de măsură de 4 cm, reprezentați punctele A, B, C, D care au coordonatele $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$.

(5p) b) Precizați care dintre puncte este situat mai aproape de punctul O .

(15p) 2. Ordonăți crescător fracțiile $\frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{23}{12}, \frac{13}{6}$.

3. Natalia a colorat o parte din cele 100 de pătrățele ale pătratului de mai jos cu trei culori: roșu, galben și albastru.



(15p) a) Exprimați prin fracții ireductibile și prin procente partea colorată cu fiecare culoare.

(5p) b) Exprimați în procente partea rămasă necolorată.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

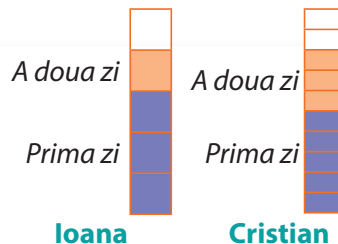
2 OPERAȚII CU FRAȚII ORDINARE

L1 Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ioana și Cristian citesc o carte interesantă. Ei vor să o termine în trei zile, pentru ca apoi să discute despre aceasta. Ioana a citit în prima zi $\frac{3}{5}$ din numărul total de pagini, iar a doua zi a citit $\frac{1}{5}$ din numărul total de pagini. Cristian a citit în prima zi $\frac{1}{2}$ din numărul paginilor cărții și $\frac{3}{10}$ din numărul paginilor cărții în a doua zi.



- Exprimați fracția din numărul total de pagini care exprimă cât a citit fiecare copil, în primele două zile.
- Exprimați fracția din numărul total de pagini pe care le mai are de citit fiecare, în a treia zi.

Soluție.

a) Ioana: Dacă la cele *trei cincimi* din numărul de pagini *adăugăm o cincime* din numărul de pagini, ajungem la concluzia că în primele două zile, Ioana a citit *patru cincimi* din carte.

Cristian: La *o doime* din numărul de pagini *adăugăm trei zecimi* din numărul de pagini. *Unitățile fracționare sunt diferite și nu se pot aduna.*

Aducem fracțiile la *același numitor*. *O doime* reprezintă *cinci zecimi*.

Cristian a citit în primele două zile *cinci zecimi* și încă *trei zecimi*, adică *opt zecimi* (sau *patru cincimi*).

b) Ioana: Întreaga carte reprezintă *cinci cincimi* din numărul de pagini. Dacă au fost deja citite *patru cincimi* din numărul de pagini, atunci mai sunt de citit *o cincime* din acest număr.

Cristian: 1. Dacă nu simplificăm fracția rezultată la a), atunci:

Întreaga carte reprezintă întregul, deci *zece zecimi* din numărul de pagini. Dacă au fost deja citite *opt zecimi* din numărul de pagini, atunci mai sunt de citit *două zecimi* din acest număr.

2. Dacă simplificăm fracția de la a), avem același calcul ca pentru Ioana.

$$\text{a) Ioana: } \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Cristian: Din } \frac{1}{2} = \frac{5}{10}, \text{ rezultă}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} \text{ și}$$

$$\frac{8}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{4}{5}.$$

$$\text{b) Ioana: } \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Cristian: 1. } \frac{10}{10} - \frac{8}{10} = \frac{10-8}{10} = \frac{2}{10} \text{ și}$$

$$\frac{2}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{5}$$

$$\text{2. } \frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Observații

- Rezultatul final, se recomandă să fie scris sub formă de fracție ireductibilă (care nu se mai poate simplifica).
- Două fracții se pot aduna doar dacă fracțiile au același numitor.
- Se poate calcula diferența a două fracții doar dacă fracțiile au același numitor, iar prima fracție este mai mare sau egală cu a doua.



Reținem

Fie a, b numere naturale și fie n număr natural nenul.

- Suma fracțiilor $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$ este fracția $\frac{a+b}{n}$. Vom scrie $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$.
- Dacă $a \geq b$, atunci diferența fracțiilor $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$ este fracția $\frac{a-b}{n}$. Vom scrie $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}$.
- Dacă fracțiile nu au același numitor, atunci aducem fracțiile la un numitor comun, de preferință *cel mai mic numitor comun*, apoi efectuăm adunarea sau scăderea.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



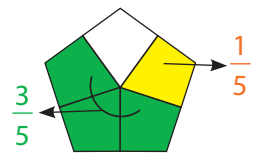
- Calculați: a) Unitatea fracționară este $\frac{1}{5}$ (o cincime). Partea colorată cu verde reprezintă $\frac{3}{5}$ (3 cincimi).

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$;

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$;

c) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$;

d) $\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$



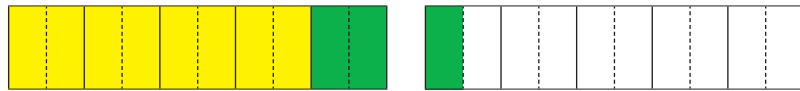
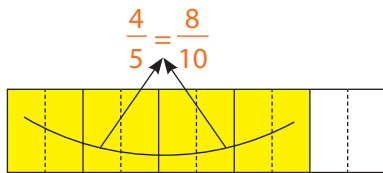
Partea colorată cu galben reprezintă $\frac{1}{5}$ (o cincime).

Partea colorată reprezintă $3 + 1 = 4$ (cincimi), adică $\frac{4}{5}$.

Scriem $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$.

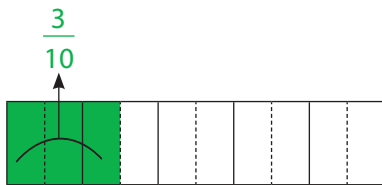
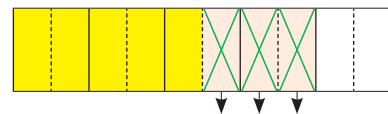
b) Frațiile $\frac{4}{5}$ și $\frac{1}{5}$ au același numitor și $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$, deci $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{8+3}{10} = \frac{11}{10}$;



d) Scăderea: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} > \frac{3}{10}$, deci are sens diferența $\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$.

$\frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8-3}{10} = \frac{5}{10}$



- Asociați fiecărei litere care indică un calcul, scris în coloana **A**, cifra corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana **B**.

A	B	Soluție.
a. $\frac{3}{5} + \frac{1}{15} =$	1. $\frac{7}{8}$	$\frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15} + \frac{1}{15} = \frac{9+1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. a → 3.
b. $1\frac{3}{4} - \frac{7}{8} =$	2. 1	$1\frac{3}{4} - \frac{7}{8} = \frac{7}{4} - \frac{7}{8} = \frac{14}{8} - \frac{7}{8} = \frac{14-7}{8} = \frac{7}{8}$. b → 1.
c. $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) =$	3. $\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. c → 2.
d. $\frac{8}{3} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{9}\right) =$	4. $\frac{9}{9}$ 5. $\frac{29}{18}$	$\frac{8}{3} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8}{3} - \frac{5}{6} - \frac{2}{9} = \frac{48}{18} - \frac{15}{18} - \frac{4}{18} = \frac{48-15-4}{18} = \frac{29}{18}$. d → 5.



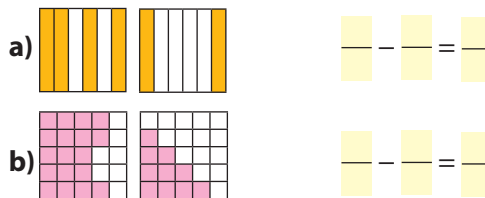
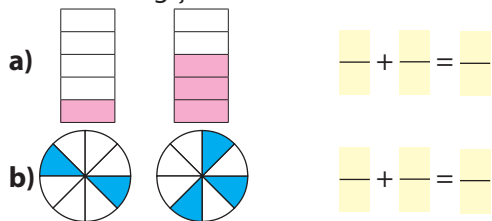
Reținem

- Adunarea este asociativă: $\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right) + \frac{c}{p} = \frac{a}{m} + \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right)$, oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}$ ($m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$).
- Adunarea este comutativă: $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{b}{n} + \frac{a}{m}$, oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}$ ($m \neq 0, n \neq 0$).
- Numărul natural $0 = \frac{0}{n}$, $n \neq 0$ este element neutru pentru adunarea fracțiilor: $0 + \frac{a}{m} = \frac{a}{m} + 0 = \frac{a}{m}$, oricare ar fi fracția $\frac{a}{m}$ ($m \neq 0$).
- Dacă diferența $\frac{a}{m} - \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right)$ are sens, atunci $\frac{a}{m} - \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{p}\right) = \frac{a}{m} - \frac{b}{n} - \frac{c}{p}$ ($m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$).
- $\frac{a}{m} - \frac{a}{m} = 0$, oricare ar fi fracția $\frac{a}{m}$, $m \neq 0$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete și completați în casetele libere fracțiile care reprezintă suprafețele colorate în fiecare întreg și suma lor.
5. Copiați pe caiete și completați în casetele libere fracțiile care reprezintă suprafețele colorate în fiecare întreg și diferența lor.



2. Efectuați adunările:

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$; c) $\frac{7}{10} + \frac{11}{10}$;
 b) $\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$; d) $\frac{3}{20} + \frac{7}{20} + \frac{9}{20}$.

3. Efectuați calculele și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6}$; c) $\frac{3}{8} + \frac{13}{8}$;
 b) $\frac{11}{4} + \frac{7}{4}$; d) $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{7}{15}$.

4. Aduceți fracțiile la același numitor și efectuați calculele:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$; c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$; e) $\frac{7}{9} + \frac{7}{6}$;
 b) $\frac{2}{9} + \frac{1}{3}$; d) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$; f) $\frac{4}{15} + \frac{3}{10}$.

6. Efectuați următoarele scăderi:

a) $\frac{8}{3} - \frac{4}{3}$; c) $\frac{27}{10} - \frac{13}{10}$;
 b) $\frac{16}{9} - \frac{5}{9}$; d) $\frac{15}{7} - \frac{8}{7}$.

7. Efectuați calculele și exprimați rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{13}{4} - \frac{7}{4}$; c) $\frac{23}{8} - \frac{11}{8}$;
 b) $\frac{19}{6} - \frac{5}{6}$; d) $\frac{77}{10} - \frac{33}{10} - \frac{24}{10}$.

8. Aduceți fracțiile la același numitor și efectuați calculele:

a) $\frac{7}{2} - \frac{5}{4}$; c) $\frac{22}{15} - \frac{4}{5}$; e) $\frac{17}{4} - \frac{11}{10}$;
 b) $\frac{8}{3} - \frac{5}{6}$; d) $\frac{7}{6} - \frac{8}{9}$; f) $\frac{7}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

9. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Rezultatul calculului $1\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ este:

A. $\frac{19}{10}$; B. $\frac{17}{5}$; C. $\frac{17}{10}$; D. $\frac{19}{5}$.

b) Diferența dintre numerele $1\frac{1}{9}$ și $\frac{5}{12}$ este:

A. $\frac{13}{12}$; B. $\frac{35}{36}$; C. $\frac{25}{12}$; D. $\frac{25}{36}$.

c) Frația cu $\frac{1}{10}$ mai mare decât $\frac{6}{5} - \frac{7}{15}$ este:

A. $\frac{5}{6}$; B. $\frac{7}{30}$; C. $\frac{7}{15}$; D. $\frac{11}{6}$.

10. Efectuați calculele:

a) $1\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6}$; c) $2\frac{1}{10} - 1\frac{2}{5}$;

b) $1 + 2\frac{1}{4} - \frac{13}{12}$; d) $4 - 2\frac{1}{20} + 1\frac{1}{50}$.

11. Efectuați calculele:

a) $\frac{3}{6} + \frac{4}{15} - \frac{1}{10}$; c) $\frac{50}{25} + \frac{42}{21} - \frac{44}{11}$;

b) $\frac{1}{10} + \frac{6}{20} - \left(\frac{11}{15} - \frac{1}{3}\right)$; d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4}$.

12. Calculați, folosind proprietățile adunării pentru:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{7}{2}$; c) $\frac{3}{4} + \frac{9}{10} + \frac{11}{10} + \frac{1}{4}$.

b) $\frac{5}{9} + \frac{5}{6} + \frac{11}{6}$;

13. Calculați $A + B$, folosind proprietățile adunării pentru:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}, B = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{9}{10}.$$

14. Irina, Delia și Sonia au cules, împreună, $3\frac{7}{10}$ kg

de cireșe. Dacă Irina a cules $1\frac{1}{4}$ kg, iar Sonia a

cules cu $\frac{1}{5}$ kg cireșe mai mult decât Irina, aflați

ce cantitate de cireșe a cules Delia.

15. La o florărie s-au adus flori.

Trandafirii reprezintă $\frac{7}{10}$ din numărul



florilor aduse, lalelele reprezintă $\frac{1}{6}$ din

numărul florilor aduse, iar restul sunt



frezii.

Exprimați printr-o fracție ireductibilă cât reprezintă freziile din numărul florilor aduse la florărie.

16. Verificați egalitatea $a - b - c = a - (b + c)$ pentru

$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{6}.$$

17. Probați egalitatea $a + b - (c + d) = a - c + b - d$

$$\text{pentru } a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{4}.$$

18. Calculați $A - B$, știind că

$$A = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{21}{20} \text{ și}$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20}.$$



Minitest

(25 p) 1. Calculați $\frac{1}{24} + \frac{13}{6}$.

2.

(20 p) a) Determinați numărul natural a din egalitatea $\frac{a}{10} + \frac{2}{5} = \frac{3}{2}$, folosind proba adunării.

(20 p) b) Determinați numărul natural b din egalitatea $\frac{b}{18} - \frac{5}{6} = \frac{4}{9}$, folosind proba scăderii.

(25 p) 3. O lădiță cu struguri cântărește $11\frac{3}{4}$ kg. Dacă lădița goală cântărește $\frac{21}{12}$ kg, aflați ce cantitate de struguri se află în lădiță.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Înmulțirea fracțiilor ordinare



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Problemă.

Andrei vrea să citească o carte într-o săptămână. El își propune să citească în primele 3 zile câte două șeptimi din numărul de pagini, iar în ultimele zile să citească restul. Determinați fracția corespunzătoare numărului de pagini pe care își propune să le citească în primele 3 zile.

Soluție. Dacă în fiecare zi citește $\frac{2}{7}$ din numărul paginilor, atunci în 3 zile, va citi **de 3 ori** $\frac{2}{7}$,
adică $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{2+2+2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7}$

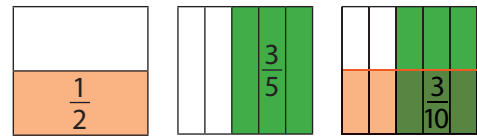
Fie a, b și n numere naturale nenule.

Produsul dintre numărul b și fracția ordinară $\frac{a}{n}$ este suma a b fracții ordinare egale cu $\frac{a}{n}$, adică

$$b \cdot \frac{a}{n} = \overbrace{\frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \dots + \frac{a}{n}}^{b \text{ termeni}} = \overbrace{\frac{a+a+\dots+a}{n}}^{b \text{ termeni}} = \frac{b \cdot a}{n}. \text{ Vom scrie } b \cdot \frac{a}{n} = \frac{b \cdot a}{n}.$$

Observație. $0 \cdot \frac{a}{n} = \frac{0 \cdot a}{n} = \frac{0}{n} = 0.$

Părinții Marei au achitat costul concediului la mare în trei tranșe. În prima tranșă au achitat $\frac{3}{5}$ din sumă, iar în a doua tranșă au achitat $\frac{1}{2}$ (jumătate) din suma achitată în prima tranșă. Exprimați printr-o fracție partea achitată în tranșa a doua.



O doime din trei cincimi reprezintă trei zecimi.

Soluție. Considerăm întregul (suma totală) împărțit în doimi, respectiv în cincimi.

Evidențiem fracțiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{5}$. Pentru a evidenția $\frac{1}{2}$ din $\frac{3}{5}$, suprapunem cele două imagini. Întregul este împărțit acum în *zecimi*, iar partea în care se suprapun culorile reprezintă $\frac{1}{2}$ din $\frac{3}{5}$ sau *produsul fracțiilor* $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{5}$.

În concluzie, *jumătate* din cele *trei cincimi*, vor reprezenta jumătate din șase zecimi, adică *trei zecimi*.

Vom scrie $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}.$

Produsul fracțiilor ordinare $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{p}$, $n \neq 0$ și $p \neq 0$, este fracția ordinară $\frac{a \cdot b}{n \cdot p}.$

Vom scrie $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{p} = \frac{a \cdot b}{n \cdot p}.$

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{p} = \frac{a \cdot b}{n \cdot p}$$

Numărul natural b poate fi privit ca fracție ordinară cu numitorul 1, adică $\frac{b}{1}$, iar înmulțirea dintre numărul b și

fracția $\frac{a}{n}$ se poate scrie $\frac{b}{1} \cdot \frac{a}{n} = \frac{b \cdot a}{1 \cdot n} = \frac{b \cdot a}{n}$, deci $b \cdot \frac{a}{n} = \frac{b \cdot a}{n}.$



Observație. Se recomandă ca rezultatul înmulțirilor să fie prezentat sub formă de fracție *ireductibilă*. Pentru a ușura calculul, se pot face *simplificări* ale fracțiilor care intervin sau simplificări ale rezultatului.

Simplificările se pot face:

1. la *finalul* calculului;
2. *pe parcursul* calculului.

Egalitățile $\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{d \cdot b} = \frac{a \cdot c}{d \cdot b}$ ne permit să facem și simplificări ale unor *factori situați*:

- a) la numărătorul, respectiv numitorul aceleiași fracții;
- b) la numărătorul, respectiv numitorul a două *fracții diferite*, fracțiile fiind factori ai aceluiași produs.

Observații.

1. Simplificările pot fi marcate prin tăierea factorilor corespunzători și scrierea alăturată a rezultatului.
2. Înainte de a calcula produsul mai multor fracții, *se introduc întregii în fracție*.

Exemplu: Calculați

$$1. \frac{9}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{9 \cdot 4}{6 \cdot 5} = \frac{36^{(6)}}{30} = \frac{6}{5}.$$

$$2. a) \frac{9^{(3)}}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4^{(2)}}{2 \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$

$$b) \frac{9^{(3)}}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1:

Verificați, prin calcul, egalitățile următoare, evidențiind proprietățile operațiilor cu numere naturale pe care le folosiți.

$$a) \left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7}\right) \cdot \frac{1}{11} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 11}\right); \quad b) \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{18} \cdot \frac{12}{5}; \quad c) 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{5} \cdot 1;$$

$$d) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}; \quad e) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}.$$

Soluție. a) $\left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7}\right) \cdot \frac{1}{11} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{11} = \frac{(3 \cdot 2) \cdot 1}{(5 \cdot 7) \cdot 11} = \frac{3 \cdot (2 \cdot 1)}{5 \cdot (7 \cdot 11)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 11} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 11}\right).$

$$b) \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{18} = \frac{12 \cdot 7}{5 \cdot 18} = \frac{7 \cdot 12}{18 \cdot 5} = \frac{7}{18} \cdot \frac{12}{5}. \quad c) 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{1 \cdot 12}{5} = \frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 1}{5} = \frac{12}{5} \cdot 1.$$

$$d) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{21}{35} + \frac{10}{35}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{21+10}{35} = \frac{2 \cdot (21+10)}{3 \cdot 35} = \frac{2 \cdot 31}{105} = \frac{2 \cdot 31}{105} = \frac{62}{105} \text{ iar}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{15} + \frac{2 \cdot 2}{21} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 2}{105} = \frac{2 \cdot 21 + 2 \cdot 10}{105} = \frac{42 + 20}{105} = \frac{62}{105}, \text{ deci are loc egalitatea.}$$

$$e) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{21}{35} - \frac{10}{35}\right) = \frac{2 \cdot (21-10)}{3 \cdot 35} = \frac{2 \cdot 11}{105} = \frac{22}{105}, \text{ iar}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 21 - 2 \cdot 10}{105} = \frac{42 - 20}{105} = \frac{22}{105}, \text{ deci are loc egalitatea.}$$

La rezolvarea acestui exercițiu am aplicat asociativitatea înmulțirii (la **a**)), comutativitatea acestei operații (la **b**) și la **c**) și distributivitatea înmulțirii față de adunare (la **d**) sau față de scădere (la **e**)).

Aplicația de mai sus ne arată că proprietățile operației de înmulțire, pe care le-am cunoscut la numere naturale, se păstrează și la înmulțirea fracțiilor ordinare.



Reținem

- Înmulțirea este asociativă: $\frac{a}{m} \cdot \left(\frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} \right) = \left(\frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} \right) \cdot \frac{a}{m}$, oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}$.
- Înmulțirea este comutativă: $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{m}$, oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}$.
- Numărul natural 1 este element neutru pentru înmulțirea fracțiilor:
 $1 \cdot \frac{a}{m} = \frac{a}{m} \cdot 1 = \frac{a}{m}$, oricare ar fi fracția $\frac{a}{m}$.
- Oricare ar fi fracția nenulă $\frac{a}{m}$, produsul $\frac{a}{m} \cdot \frac{m}{a} = 1$. Frația $\frac{m}{a}$ este inversa fracției $\frac{a}{m}$.
- Înmulțirea este distributivă față de adunare și scădere:
 $\frac{a}{m} \cdot \left(\frac{b}{n} + \frac{c}{p} \right) = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} + \frac{a}{m} \cdot \frac{c}{p}$ și $\frac{a}{m} \cdot \left(\frac{b}{n} - \frac{c}{p} \right) = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} - \frac{a}{m} \cdot \frac{c}{p}$, oricare ar fi fracțiile $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}, \frac{b}{n} > \frac{c}{p}$.

Observație. În enunțurile de mai sus, toți numitorii sunt numere naturale nenule.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Fracția ordinară, de patru ori mai mare decât $\frac{3}{5}$, este:
A. $\frac{12}{20}$; **B.** $\frac{3}{20}$; **C.** $\frac{12}{5}$; **D.** $\frac{16}{5}$.
 - La o cantină, se aduc zilnic câte $12\frac{3}{8}$ kg de fructe.
 Cantitatea adusă în șase zile este:
A. $75\frac{1}{4}$ kg; **C.** $76\frac{3}{4}$ kg;
B. $74\frac{1}{4}$ kg; **D.** $\frac{604}{48}$ kg.
- Efectuați înmulțirile:
 - $2 \cdot \frac{5}{7}$; **c)** $4 \cdot \frac{9}{11}$; **e)** $\frac{7}{30} \cdot 20$;
 - $3 \cdot \frac{2}{5}$; **d)** $5 \cdot \frac{3}{10}$; **f)** $\frac{8}{9} \cdot 27$.
- Efectuați calculele:
 - $4 \cdot 2\frac{1}{5}$; **c)** $14 \cdot 3\frac{2}{7}$; **e)** $1\frac{4}{10} \cdot 40$;
 - $2 \cdot 1\frac{3}{8}$; **d)** $5 \cdot 2\frac{1}{10}$; **f)** $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}$.
- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Rezultatul înmulțirii $\frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4}$ este:
A. $\frac{40}{7}$; **B.** $\frac{13}{12}$; **C.** $\frac{10}{7}$; **D.** $\frac{10}{3}$.
 - Înmulțind $\frac{33}{100}$ cu $3\frac{7}{11}$, se obține:
A. $\frac{6}{5}$; **B.** $\frac{1320}{110}$; **C.** $\frac{7}{5}$; **D.** $\frac{12}{5}$.
- Copiați pe caiete, apoi completați în spațiile libere răspunsul corect.
 - Produsul dintre $2\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{8}$ este
 - Rezultatul calculului $20 \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{56}$ este
 - Dacă $a = \frac{13}{10}$ și $x + y = \frac{50}{3}$, atunci
 $a \cdot x + a \cdot y = \dots$
 - Dacă $b = 2\frac{1}{5}$ și $x - y = \frac{10}{33}$, atunci
 $b \cdot x - b \cdot y = \dots$

6. Efectuați calculele și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

- a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{9}$; f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{4}$;
 b) $\frac{6}{5} \cdot \frac{7}{3}$; g) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{28}{9}$;
 c) $\frac{11}{6} \cdot \frac{3}{22}$; h) $\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{15} \cdot 2 \frac{6}{7}$;
 d) $2 \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16}$; i) $4 \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{19} \cdot 6$;
 e) $3 \frac{1}{6} \cdot 0$. j) $\frac{7}{7} \cdot 3 \frac{1}{8} \cdot 32$.

7. a) Scrieți două fracții al căror produs este 1.

b) Scrieți inversele fracțiilor $\frac{27}{10}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{16}{15}$, 2 , $\frac{6}{7}$.

8. Fie $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$. Calculați $21 \cdot a$.

9. Identificați factorul comun, dați factor comun și efectuați calculele:

- a) $10 \cdot \frac{7}{9} + 10 \cdot \frac{20}{9}$; e) $\frac{17}{15} \cdot \frac{2}{34} + \frac{51}{5} \cdot \frac{2}{34}$;
 b) $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{7} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7}$; f) $\frac{24}{35} \cdot \frac{18}{25} + \frac{24}{35} \cdot \frac{2}{15} + \frac{24}{35} \cdot \frac{11}{75}$;
 c) $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$ g) $\frac{12}{49} \cdot \frac{81}{25} - \frac{1}{35} \cdot \frac{12}{49} + \frac{4}{25} \cdot \frac{12}{49}$.
 d) $\frac{7}{12} \cdot \frac{23}{27} + \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{27}$;

10. Calculați produsul $\frac{a}{b} \cdot \frac{9}{14}$, știind că $\frac{a}{b}$ este:

- a) $\frac{91}{18}$; b) $\frac{14}{66}$; c) $\frac{35}{54}$; d) $\frac{26}{108}$.

11. Calculați produsul $\frac{5}{36} \cdot \frac{a}{b}$, știind că $\frac{a}{b}$ este:

- a) $\frac{8}{15}$; b) $\frac{63}{60}$; c) $\frac{48}{45}$; d) $\frac{63}{110}$.

12. a) Calculați:

$$a = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8}, \quad b = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9}.$$

b) Comparați fracțiile obținute. Reprezentați-le pe axă.

13. Printr-un robinet care alimentează o piscină curg într-o oră $\frac{500}{3}$ litri de apă.

Calculați câți litri de apă se strâng în piscină:

a) în 2 ore; b) în 6 ore.

14. Cu un camion încărcat la capacitate maximă se pot transporta $7 \frac{1}{10}$ tone de nisip.

a) Calculați cantitatea maximă de nisip pe care o poate transporta acest camion, știind că face cinci transporturi.

b) Precizați dacă sunt suficiente 15 transporturi pentru a duce pe un șantier 100 tone de nisip.



Minitest

1. Efectuați calculele necesare și completați răspunsul corect, în spațiile punctate.

(15 p) a) Frația de 12 ori mai mare decât $\frac{7}{16}$ este ...

(15 p) b) Înmulțind $2 \frac{3}{4}$ cu $\frac{8}{33}$ se obține ...

(15 p) c) Produsul dintre fracțiile $\frac{2^2 \cdot 3^4}{5^3 \cdot 7^2}$ și $\frac{125 \cdot 7}{(2 \cdot 3)^3}$ este ...

(15 p) 2. Aflați distanța pe care o parcurge un biciclist în $1 \frac{3}{5}$ ore, știind că se deplasează cu viteza medie de 25 km pe oră.

3. Calculați:

(15 p) a) $x \cdot y \cdot z$ știind că $x \cdot z = \frac{7}{5}$ și $y = \frac{15}{28}$.

(15 p) b) $x \cdot y - x \cdot z$, știind că $x = 1 \frac{2}{3}$ și $y - z = 2 \frac{1}{10}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L3 Frații dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară. Procente



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Emma îi dăruiește mamei *o treime* din *cireșele pe care le ține în mână* sub forma unei inimioare, iar bunica face gem din *o treime* din *cireșele* pe care le-a cules din *cireșul* din curte, *aflate în trei coșuri pline*.

Comparați cantitatea de cireșe pe care o dăruiește Emma cu cantitatea pe care o folosește bunica pentru gem.



Rezolvare. Întregii la care se raportează treimea (cantitatea de cireșe din mâna Emmei, respectiv cantitatea de cireșe din trei coșuri) reprezintă cantități diferite. Cantitatea de cireșe dăruită de Emma este, evident, mai mică, deoarece *întregul* la care se raportează fracția este reprezentat de o cantitate mai mică.

Am observat că fracțiile sunt raportate la *întregi* împărțiți în *unități fracționare*. Rezultatele calculelor cu fracții trebuie, de asemenea, puse în contextul *întregilor* la care se referă.

De exemplu, dacă unitatea de măsură este 5 cm, atunci *o cincime* are 1 cm, *două cincimi* au 2 cm ș.a.m.d. Dacă alegem un segment de 10 cm, atunci *o cincime* reprezintă 2 cm, *două cincimi* reprezintă 4 cm, ș.a.m.d. Prin urmare, este util să știm ce reprezintă *o fracție dintr-un număr natural sau dintr-o altă fracție*.

Din exemplul de mai sus, deducem că $\frac{a}{5}$ din 5 reprezintă $\frac{a \cdot 5^{(5)}}{5} = a$, iar $\frac{a}{5}$ din 10 reprezintă $\frac{a \cdot 10^{(5)}}{5} = 2 \cdot a$.

În general, dacă a, b, n sunt numere naturale, $n \neq 0$, atunci $\frac{a}{n}$ din b reprezintă produsul $\frac{a}{n} \cdot b = \frac{a \cdot b}{n}$.

Exemplu.

$\frac{7}{5}$ din 375 este $\frac{7}{5} \cdot 375 = \frac{7 \cdot 375^{(5)}}{5} = 525$.

Dacă a, b, n, m sunt numere naturale, $n \neq 0, m \neq 0$, atunci $\frac{a}{n}$ din $\frac{b}{m}$ reprezintă produsul $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{m} = \frac{a \cdot b}{n \cdot m}$.

Exemplu.

$\frac{7}{5}$ din $\frac{3}{14}$ este $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{7 \cdot 3^{(7)}}{5 \cdot 14} = \frac{3}{10}$.

Observație. Se recomandă ca rezultatele să fie scrise sub formă de fracție ordinară ireductibilă.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

A sută parte dintr-un întreg se numește *procent*.

Fracția $\frac{p}{100}$ se mai scrie $p\%$ și se citește

p procente sau *p la sută*.

Prin urmare, $p\%$ dintr-un număr natural a este produsul

$\frac{p}{100} \cdot a = \frac{p \cdot a}{100} = (p \cdot a)\%$, iar $p\%$ dintr-o fracție $\frac{a}{n}$, $n \neq 0$ este

produsul $\frac{p}{100} \cdot \frac{a}{n} = \frac{p \cdot a}{100 \cdot n} = \frac{p \cdot a : n}{100} = (p \cdot a : n)\%$.

Exemple

1) 25 % din 500 reprezintă

$$\frac{25}{100} \cdot 500 = \frac{25 \cdot 500}{100} = \frac{12500^{(100)}}{100} = 125.$$

2) 25 % din fracția $\frac{2}{5}$ reprezintă

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{2}{5} = \frac{25 \cdot 2 : 5}{100} = \frac{10^{(10)}}{100} = \frac{1}{10}.$$

Probleme rezolvate.

1. Irina și Elena au decis să culeagă o parte din cele 10 kg de vișine, din care bunica va prepara sirop și dulceață. Irina a cules $\frac{2}{5}$ din cantitatea propusă, iar Elena, $\frac{3}{10}$ din aceeași cantitate.

Aflați ce cantitate de vișine a cules fiecare fată.



Rezolvare:

Irina a cules $\frac{2}{5}$ din cele 10 kg.

Reprezentăm grafic:



$$\frac{2}{5} \text{ din } 10 = \frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 \text{ (kg)}$$

Irina a cules 4 kg de vișine.

Elena a cules $\frac{3}{10}$ din cele 10 kg.

Reprezentăm grafic:



$$\frac{3}{10} \text{ din } 10 = \frac{3}{10} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 10}{10} = 3 \text{ (kg)}$$

Elena a cules 3 kg de vișine.

2. În urma unui sondaj, s-a constatat că 4% dintre copiii unei localități cu un nivel ridicat de poluare, au avut în ultimul an probleme digestive. Știind că în această localitate locuiesc 750 de copii, aflați câți copii au fost înregistrați cu afecțiuni digestive. Vom completa un tabel, apoi vom scrie redactarea rezolvării problemei.

Cum scriem		Cum calculăm	Rezultat
4% din 750	$\frac{4}{100}$ din 750	$\frac{4}{100} \cdot 750 = \frac{4}{10} \cdot \frac{750}{10} = \frac{4}{2} \cdot \frac{75}{1} = \frac{4}{2} \cdot \frac{15}{1} = 30$.	30 de copii

Model de redactare. 4% din 750 reprezintă $\frac{4}{100} \cdot 750$.

Cum $\frac{4}{100} \cdot 750 = \frac{4}{10} \cdot \frac{750}{10} = \frac{4}{2} \cdot \frac{75}{1} = \frac{4}{2} \cdot \frac{15}{1} = 30$, rezultă că au fost înregistrați 30 de copii.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - O treime din numărul 189 este:
A. 69; B. 73; C. 63; D. 66.
 - 35% din $\frac{80}{7}$ m reprezintă:
A. $\frac{15}{4}$ m; B. 3 m; C. 4 m; D. $\frac{15}{7}$ m.
- Copiați pe caiete, efectuați calculele necesare, apoi completați în spațiile punctate răspunsul corect.
 - Cinci optimi din cei 24 elevi ai clasei a V-a D sunt băieți. Numărul băieților din clasă este ...
 - Petra are $100\frac{1}{2}$ lei și cheltuie două treimi din ei. Suma care îi rămâne Petrei este ... lei.
 - Un joc LEGO are 320 piese, dintre care 15% sunt albastre, iar 25% sunt roșii. Numărul pieselor care nu sunt nici albastre nici roșii este ...
- Calculați:
 - jumătate din: 76; 2022; $\frac{8}{5}$.
 - o treime din: 354; $\frac{69}{2}$; $\frac{111}{7}$.
 - trei zecimi din: 70; $\frac{140}{3}$; $\frac{10^3}{9}$.
 - $\frac{8}{21}$ din $\left(\frac{31}{2} + \frac{1}{4}\right)$.

4. Aflați:
- a) $\frac{4}{7}$ din 560 lei; c) $2\frac{1}{2}$ din $\frac{18}{5}$ kg;
- b) $\frac{3}{11}$ din $\frac{55}{6}$ m; d) $\frac{2}{5}$ dintr-o jumătate de oră.
5. Calculați 5% din:
- a) 240 lei; c) $\frac{44}{5}$ km;
- b) $\frac{75}{2}$ kg; d) $50\frac{1}{5}$ litri.
6. Iulia are $256\frac{1}{4}$ lei și cumpără două obiecte cu 15%, respectiv cu 37% din sumă. Exprimați în procente suma de bani care i-a rămas luliei, apoi aflați această sumă.
7. Un grup de turiști parcurge $\frac{121}{6}$ km în trei zile. Știind că în prima zi, grupul a parcurs $\frac{3}{11}$ din distanță, iar în a doua zi, a parcurs cu 20% mai mult decât în prima zi, aflați distanțele parcurse în fiecare dintre cele trei zile.
8. Într-o bibliotecă, sunt 21 600 volume de cărți. O optime din numărul volumelor sunt scrise în limba franceză, patru șeptimi din numărul volumelor care nu sunt în limba franceză, sunt scrise în limba engleză, iar restul volumelor sunt în limba română. Aflați câte volume sunt scrise în limba română.
9. Pe un teren agricol cu suprafața de $33\frac{1}{3}$ ha, s-au cultivat: grâu pe $\frac{3}{5}$ din suprafață, porumb pe 30% din suprafață, iar pe restul suprafeței cartofi. Aflați ce suprafață are fiecare cultură.
10. Desenați un segment AB cu lungimea 15 cm și marcați pe segment punctul C , astfel încât AC să aibă lungimea $\frac{2}{5}$ din AB . Calculați lungimea segmentului BC .
11. Locuită la sfârșitul anului 2021 de aproximativ 8 miliarde de persoane, se estimează că populația Terrei va crește până în 2030 cu 640 milioane de persoane.
- a) Calculați procentul de creștere estimat, a populației lumii, în perioada 2021-2030.
- b) Dacă populația Europei era la sfârșitul anului 2021 de 744 milioane persoane, estimați numărul de locuitori ai Europei în anul 2030, folosind rezultatul obținut la subpunctul a).
12. În orașul în care se mută familia Mariei, aproximativ 7 % dintre elevii de gimnaziu participă la cursuri de dans. Știind că în oraș sunt aproximativ 3850 de elevi de gimnaziu, estimați numărul elevilor care participă la cursuri de dans.
13. Prețul unui laptop a fost 12 000 de lei. După o perioadă de timp, s-a redus cu 10%, apoi s-a redus, din nou cu 20%.
- a) Calculați suma cu care a fost redus prețul în fiecare etapă.
- b) Calculați prețul final al laptopului.
- c) Exprimați în procente, raportate la prețul inițial, noul preț al laptopului.
- d) Aflați cu câte procente ar fi trebuit redus prețul inițial, pentru ca după o singură reducere să ajungă la același preț final.



Minitest

- (3x15 p) 1. Calculați: a) $\frac{3}{8}$ din 216 kg; b) $\frac{4}{5}$ din $\frac{75}{2}$ m; c) 48% din $\frac{425}{3}$ l.
- (25 p) 2. Raul a depus la bancă, în data de 1 martie, suma de 4500 lei. La sfârșitul fiecărei luni primește o dobândă de 1% pentru banii depuși, sumă care se adaugă depozitului său. Procedul se repetă în fiecare lună. Aflați ce sumă va avea Raul la bancă în 1 iunie.
- (20 p) 3. La un concurs sportiv, concurenții au parcurs 42 km, astfel: $\frac{2}{7}$ din distanță cu bicicleta, 20% din restul distanței înotând, iar ultimii km alergând. Aflați distanțele parcurse în fiecare dintre cele trei moduri de deplasare și precizați în ce mod e parcursă cea mai mare distanță.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L4 Împărțirea fracțiilor ordinare



Ne amintim

Fie a și b numere naturale nenule.

Produsul fracțiilor $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ este $\frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a \cdot b^{(ab)}}{a \cdot b} = \frac{1}{1} = 1$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ sunt fracții *inverse*:

$\frac{a}{b}$ este *inversa fracției* $\frac{b}{a}$, iar $\frac{b}{a}$ este *inversa fracției* $\frac{a}{b}$.

În particular, inversa fracției $a = \frac{a}{1}$ este $\frac{1}{a}$ și inversa

fracției $\frac{1}{a}$ este $\frac{a}{1} = a$.

Exemple:

$$1) \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{1}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}} = 1. \text{ Atunci, } \frac{7}{2} \text{ este inversa fracției } \frac{2}{7},$$

iar $\frac{2}{7}$ este inversa fracției $\frac{7}{2}$.

$$2) \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1}}{1 \cdot \frac{1}{1}} = 1. \text{ Atunci, } \frac{1}{2} \text{ este inversa fracției}$$

$2 = \frac{2}{1}$, iar $2 = \frac{2}{1}$ este inversa fracției $\frac{1}{2}$.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pe un teren se plantează flori. Pe două cincimi din teren s-au plantat panseluțe, iar pe restul terenului s-au plantat, în mod egal, lalele și narcise.

Scrieți sub formă de fracție ordinară partea din teren pe care s-au plantat lalele.

Rezolvare: Partea din teren pe care s-au plantat panseluțe reprezintă $\frac{2}{5}$. Restul terenului reprezintă $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, adică 3 cincimi. Trebuie să împărțim în două părți egale cele 3 cincimi.

Cum $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10}$, rezultă că lalele și narcise s-au plantat, fiecare pe câte

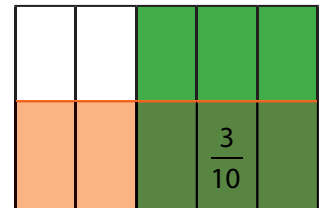
3 zecimi din teren, adică partea corespunzătoare fracției $\frac{3}{10}$.

În imaginea alăturată, dreptunghiul reprezentat prin suprapunerea culorilor poate

fi văzut în două moduri: $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ sau $\frac{3}{5} : 2$ adică $\frac{3}{5} : \frac{2}{1}$.

Deducem că $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5} : \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$.

Ca să împărțim fracția $\frac{3}{5}$ la fracția $\frac{2}{1}$, am înmulțit $\frac{3}{5}$ cu inversa fracției $\frac{2}{1}$, deci cu fracția $\frac{1}{2}$.



Fie $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ două fracții nenule. A împărți fracția $\frac{a}{b}$ la fracția $\frac{c}{d}$ înseamnă a înmulți prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Pentru fracțiile nenule $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, avem:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Cazuri particulare:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \text{ și}$$

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0.$

Exemple:

$$1) \frac{9}{7} : \frac{3}{5} = \frac{9}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 1} = \frac{15}{7}.$$

$$2) \frac{9}{7} : 3 = \frac{9}{7} : \frac{3}{1} = \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}.$$

$$3) 3 : \frac{7}{1} = \frac{3}{1} : \frac{7}{1} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 7} = \frac{3}{7}.$$

Observație. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \left(\frac{c \cdot e}{d \cdot f} \right)$, oricare ar fi fracțiile nenule $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, unde a, b, c, d, e, f sunt numere naturale diferite de 0.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație.

a) Efectuați calculul: $\frac{7}{3} : 1 \frac{5}{9} : \frac{5}{2}.$

b) Calculați $b + c$, știind că $a = \frac{22}{15}$ și $a \cdot b = \frac{4}{5}$ și $a \cdot c = \frac{3}{10}.$

c) Calculați a , știind că $b - c = 3 \frac{1}{5}$ și $a \cdot b - a \cdot c = \frac{32}{25}.$

Soluție. a) $1 \frac{5}{9} = \frac{1 \cdot 9 + 5}{9} = \frac{14}{9}.$ Atunci, $\frac{7}{3} : 1 \frac{5}{9} : \frac{5}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{2}{5} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}.$

b) $a \cdot b + a \cdot c = \frac{4}{5} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} + \frac{3}{10} = \frac{11}{10}.$ Atunci, $a \cdot (b + c) = \frac{11}{10}$, adică $\frac{22}{15} \cdot (b + c) = \frac{11}{10}.$

Folosind proba înmulțirii, obținem $b + c = \frac{11}{10} : \frac{22}{15} = \frac{11}{2} \cdot \frac{15}{22} = \frac{3}{4}.$

c) $b - c = 3 \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{16}{5}.$ Din $a \cdot b - a \cdot c = \frac{32}{25}$, rezultă $a \cdot (b - c) = \frac{32}{25}$, deci $a \cdot \frac{16}{5} = \frac{32}{25}.$

Folosind proba înmulțirii, $a = \frac{32}{25} : \frac{16}{5} = \frac{32}{5} \cdot \frac{5}{16} = \frac{2}{5}.$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți inversele fracțiilor $\frac{5}{2}, \frac{1}{8}, 7 \frac{1}{7}$, apoi efectuați împărțirile:

a) $3 : \frac{5}{2};$ b) $4 : \frac{1}{8};$ c) $25 : 7 \frac{1}{7}.$

2. Scrieți inversele fracțiilor $\frac{4}{1}, \frac{18}{1}, \frac{7}{2}$ și efectuați

împărțirile: a) $\frac{8}{3} : 4;$ b) $\frac{9}{7} : 18;$ c) $\frac{35}{6} : \frac{7}{2}.$

3. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Rezultatul împărțirii fracției $\frac{25}{4}$ la 5 este:

A. $\frac{4}{5}$; B. $\frac{5}{4}$; C. $\frac{125}{20}$; D. $\frac{125}{4}$.

b) Rezultatul împărțirii $\frac{49}{6} : \frac{7}{2}$ este:

A. $\frac{7}{3}$; B. $\frac{49}{12}$; C. $\frac{7}{8}$; D. $\frac{7}{4}$.

c) Un atlet aleargă 39 km în $3\frac{1}{4}$ ore, păstrând viteză constantă. Distanța parcursă într-o oră a fost:

A. 9 km; B. 10 km;
C. $\frac{39}{4}$ km; D. 12 km.

4. Calculați și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{3}{8} : \frac{5}{2}$; d) $\frac{9}{7} : \frac{27}{28}$; g) $6\frac{3}{7} : \frac{9}{14}$;

b) $\frac{6}{35} : \frac{3}{5}$; e) $\frac{16}{15} : \frac{8}{35}$; h) $\frac{11}{12} : 3\frac{2}{3}$;

c) $\frac{11}{2} : \frac{33}{10}$; f) $3\frac{1}{2} : \frac{7}{4}$; i) $1 : 3\frac{2}{5}$.

5. Copiați pe caiete, apoi completați în spațiile punctate răspunsul corect.

a) Dacă $a \cdot b = 2\frac{1}{7}$ și $b = \frac{10}{21}$, atunci $a = \dots$

b) Dacă $a \cdot b = \frac{3}{8}$ și $a \cdot b \cdot c = \frac{33}{44}$, atunci $c = \dots$

c) Dacă $a \cdot b = \frac{4}{5}$, $a \cdot c = \frac{7}{5}$ și $a = \frac{22}{10}$, atunci $b + c = \dots$

d) Dacă $b - c = 2\frac{1}{10}$ și $a \cdot b - a \cdot c = \frac{63}{20}$, atunci $a = \dots$

6. Aflați rezultatul împărțirii dintre:

a) $4\frac{1}{5}$ și 6; c) $\frac{9}{5} - \frac{9}{10}$ și 18;

b) $\frac{26}{15}$ și $2\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{7}{9}$ și $\frac{35}{9}$.

7. Vlad se pregătește pentru un concurs și aleargă $9\frac{1}{2}$ km în fiecare zi. Aflați în câte zile va parcurge 38 km.

8. Calculați rezultatul împărțirii dintre un sfert din fracția $\frac{192}{5}$ și numărul 12, apoi exprimați-l sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

9. Într-un container sunt $787\frac{1}{2}$ kg făină. Făina se ambalează în pungi de $\frac{3}{4}$ kg, apoi pungile se pun în baxuri care conțin, fiecare, câte 30 de pungi. Aflați numărul pungilor și numărul baxurilor obținute, știind că s-a ambalat întreaga cantitate de făină.

10. Scrieți sub formă de fracții ireductibile:

a) $\frac{40}{20} : \frac{9}{3}$; b) $\frac{14}{27} : \frac{1}{9}$; c) $\frac{3}{1} : \frac{1}{9}$; d) $\frac{70}{6} : \frac{3}{7}$; e) $\frac{3^3}{81}$.

Indicație:

$$\frac{40}{20} = 40 : \frac{20}{3}; \quad \frac{14}{27} = \frac{9}{14} : 27; \quad \frac{3}{1} = \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$$



Minitest

(3 × 15 p) 1. Efectuați calculele:

a) $\frac{5}{2} : \frac{25}{16}$; b) $4\frac{2}{3} : \frac{28}{9}$; c) $\frac{2^3 \cdot 3}{5^2 \cdot 7} : \frac{2 \cdot 3^2}{5^3}$.

(25 p) 2. Pentru a confecționa macheta unui avion, Sandu are nevoie de $10\frac{1}{2}$ ore. Aflați în câte zile realizează macheta, știind că lucrează o oră și trei sferturi, în fiecare zi.

(20 p) 3. Dintr-un depozit s-a vândut 20% din cantitatea de cereale existentă și au mai rămas $73\frac{3}{5}$ tone de cereale. Aflați cantitatea de cereale care a fost la început în depozit.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L5 Ridicarea la putere a unei fracții ordinare

Fie $\frac{a}{b}$ fracție ordinară ($b \neq 0$) și n un număr natural nenul.

Atunci, puterea a n -a a fracției $\frac{a}{b}$ este

fracția ordinară $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ factori}} = \frac{a^n}{b^n}$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$, oricare ar fi fracția nenulă $\frac{a}{b}$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Fracția $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, se numește *bază* a puterii, iar numărul natural n se numește *exponent al puterii*.

Exemple:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$.

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$.

3) $\left(\frac{0}{b}\right)^n = 0$, oricare ar fi $b \neq 0$.

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$, oricare ar fi $b \neq 0$.

Regulile de calcul cu puteri ale fracțiilor ordinare revin la aplicarea regulilor de calcul cu puteri ale numerelor naturale.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Considerăm fracțiile ordinare $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ și numerele naturale nenule m și n .

Operația/regula	Exemplu
1. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$;	$\left(\frac{7}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^5 = \left(\frac{7}{3}\right)^9$;
2. Dacă $n \geq m$ și $a \neq 0$, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$;	$\left(\frac{9}{2}\right)^7 : \left(\frac{9}{2}\right)^6 = \left(\frac{9}{2}\right)^{7-6} = \frac{9}{2}$;
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$;	$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^7 = \left(\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}\right)^7 = \left(\frac{5}{6}\right)^7$;
4. Dacă $c \neq 0$, atunci $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n$;	$\left(\frac{5}{2}\right)^7 : \left(\frac{7}{3}\right)^7 = \left(\frac{5}{2} : \frac{7}{3}\right)^7 = \left(\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 7}\right)^7 = \left(\frac{15}{14}\right)^7$;
5. $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$.	$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{30}$.



1. Scrieți ca putere:

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$; d) $\frac{9}{4}$;

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$; e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$, $b \neq 0$;

c) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$;

2. Scrieți puterea care are:

a) baza $\frac{1}{4}$ și exponentul 5;

b) baza $\frac{7}{8}$ și exponentul 4;

c) baza $1\frac{2}{3}$ și exponentul 10.

3. Stabiliți care dintre numerele

$a = \left(\frac{5}{4}\right)^3$ și $b = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^4$ este mai mare.

4. Scrieți, utilizând notații matematice:

a) puterea a cincea a fracției $\frac{1}{2}$;

b) puterea a patra a fracției $\frac{2}{5}$;

c) pătratul fracției $1\frac{3}{4}$;

d) puterea a treia a fracției $\frac{1}{5}$;

e) puterea a patra a fracției $1\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{14}$.

5. Efectuați calculele:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, $\left(\frac{4}{9}\right)^2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^2$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{6}{5}\right)^3$, $\left(\frac{100}{7}\right)^3$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(\frac{4}{3}\right)^4$, $\left(\frac{1}{6}\right)^4$;

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^1$, $\left(\frac{8}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1$, $\left(\frac{101}{777}\right)^0$.

6. Efectuați calculele:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$; b) $\frac{10}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^3$;

c) $250 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$; d) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

7. Arătați că următoarele fracții sunt puteri ale lui $\frac{1}{2}$.

a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{64}$; c) $\frac{10}{160}$; d) 1.

8. Arătați că următoarele fracții sunt puteri ale lui $\frac{2}{3}$.

a) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{16}{81}$; b) $\frac{8}{27}$; d) $\frac{320}{2430}$.

9. Scrieți ca o singură putere:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$; e) $\left(\frac{8}{3}\right)^5 : \left(\frac{8}{3}\right)^3$;

b) $\left(\frac{7}{5}\right) \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^2$; f) $\left(\frac{13}{6}\right)^{12} : \left(\frac{13}{6}\right)^9$;

c) $\left(\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^5$; g) $\left(\frac{2}{5}\right)^5 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$;

d) $\left(1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^5$; h) $\left(\frac{4}{11}\right)^{10} : \left(\frac{4}{11}\right)^6 : \left(\frac{4}{11}\right)$.

10. Scrieți ca o singură putere:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$; d) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^4$;

b) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^5$; e) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$;

c) $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^7\right]^0$; f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$.

11. Arătați că:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ și $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$;

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ și $\left(\frac{3}{2}\right)^3 < \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

12. Scrieți în ordine descrescătoare fracțiile:

$\left(\frac{3}{2}\right)^{19}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{10}$, $\left(\frac{27}{8}\right)^7$, $\frac{9 \cdot 3^{20}}{8 \cdot 2^{19}}$.





Minitest

Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- (30 p) 1. Puterea a patra numărul $\frac{2}{3}$ este: **A.** $\frac{8}{12}$; **B.** $\frac{16}{27}$; **C.** $\frac{16}{81}$; **D.** $\frac{8}{81}$.
- (30 p) 2. Dacă $a = 2\frac{3}{4}$, atunci a^2 este: **A.** $\frac{22}{8}$; **B.** $\frac{122}{8}$; **C.** $\frac{121}{8}$; **D.** $\frac{121}{16}$.
- (30 p) 3. Dacă $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{25}$, atunci $\left(\frac{x}{7}\right)^2$ este: **A.** $\frac{49}{4}$; **B.** $\frac{4}{49}$; **C.** $\frac{4}{7}$; **D.** $\frac{7}{4}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare / autoevaluare

I. Pe foaia de test sau pe caiet, completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

- (5p) 1. Rezultatul calculului $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ este
- (5p) 2. Rezultatul calculului $\frac{7}{4} - \frac{5}{8} + \frac{3}{10}$ este
- (5p) 3. Produsul dintre $2\frac{3}{5}$ și $1\frac{9}{26}$ este
- (5p) 4. Împărțind $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ la $\frac{1}{14} + \frac{3}{7}$ se obține

II. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

Într-o drumeție, doi prieteni au parcurs în prima oră $\frac{1}{4}$ din traseul propus, în a doua oră, $\frac{3}{10}$ din traseu, iar în următoarele două ore, porțiuni din traseu egale și au ajuns la destinație.

(5p) 1. Partea de traseu parcursă în primele două ore este reprezentată de fracția:

- A.** $\frac{1}{2}$; **B.** $\frac{7}{10}$; **C.** $\frac{13}{20}$; **D.** $\frac{11}{20}$.

(5p) 2. Partea de traseu parcursă în a treia oră este reprezentată de fracția:

- A.** $\frac{1}{4}$; **B.** $\frac{9}{40}$; **C.** $\frac{7}{20}$; **D.** $\frac{13}{40}$.

(5p) 3. Dacă în ultimele două ore sunt parcurși 9 km, lungimea traseului este:

- A.** 15 km; **B.** 16 km; **C.** 20 km; **D.** 18 km.

III. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră $x = 1\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$, $y = \frac{13}{8} \cdot \frac{4}{3} - \frac{7}{9} : \frac{2}{3}$ și $z = \left[2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] \cdot \frac{7}{22}$.

(30p) a) Efectuați calculele și aflați x , y , z .

(10p) b) Precizați ordinea crescătoare a fracțiilor x , y , z .

2. În școala în care învață Petra sunt 28 de clase cu câte 24 de elevi fiecare. Din numărul total de elevi $\frac{3}{8}$ sunt fete și 25% sunt elevi în clasa a V-a. Aflați:

(10p) a) numărul fetelor din aceea școală;

(5p) b) numărul elevilor care nu sunt în clasa a V-a.

Se acordă 10 puncte din oficiu.





Test de evaluare sumativă

Subiectul I. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (10p) 1. Frația $\frac{32}{40}$ este echivalentă cu fracția ireductibilă:
A. $\frac{5}{4}$; B. $\frac{4}{5}$; C. $\frac{3}{5}$; D. $\frac{8}{10}$.
- (10p) 2. Dacă $\frac{3}{5} < \frac{n}{10} < \frac{16}{20}$, atunci n este egal cu:
A. 5; B. 6; C. 7; D. 8.
- (10p) 3. Numărul natural m pentru care fracția $\frac{71}{8+7 \cdot m}$ este echiunitară este:
A. 9; B. 8; C. 7; D. 6.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

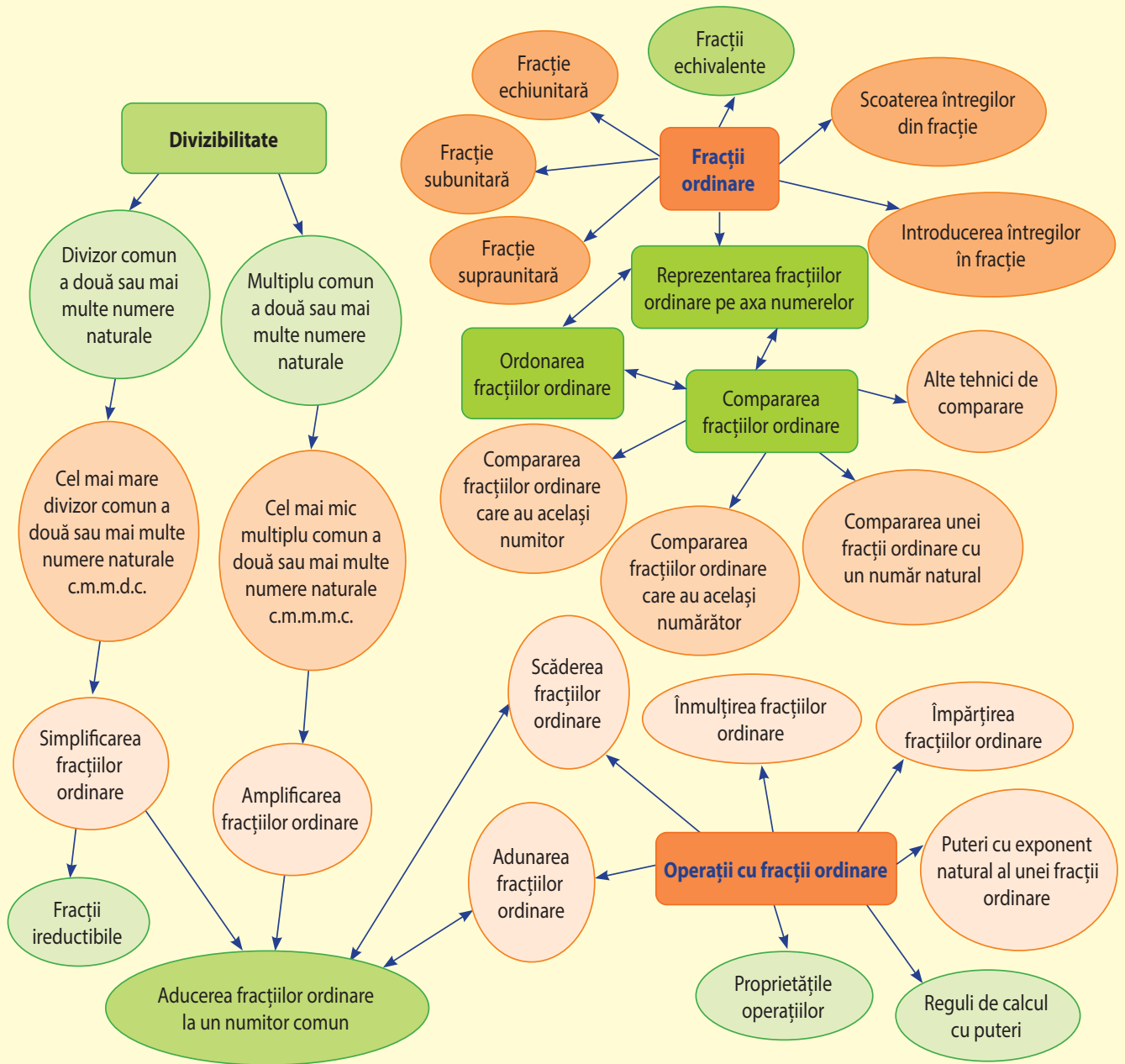
- (10p) 1. Barbu are 10 colege de clasă, ceea ce reprezintă $\frac{2}{5}$ din numărul elevilor din clasă.
Aflați câți colegi de clasă are Barbu, băieți și fete.
- (10p) 2. Precizați care este cea mai mică fracție și care este cea mai mare fracție din șirul:
 $\frac{2}{5}, \frac{7}{10}, \frac{9}{15}, \frac{5^0}{5}, \frac{5^2-5^0}{2 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{90}{100}$.
- (15p) 3. Aflați:
a) $\frac{5}{12}$ din 516 kg; b) 18% din 450 lei; c) $\frac{13}{20}$ din $2\frac{2}{39}$ m.
- (10p) 4. Fie $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) : 4 + \frac{7}{9}$ și $b = \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{6}\right) : 6 + \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Calculați $2 \cdot a - b$.
- (15p) 5. Dintre cei 270 de pomi fructiferi dintr-o livadă $\frac{5}{9}$ sunt meri. Știind că 40% dintre pomii care nu sunt meri, sunt peri și că restul pomilor sunt cireși, aflați numărul merilor, numărul perilor și numărul cireșilor din livadă.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.





Schemă recapitulativă a capitolului



CAPITOLUL III

FRAȚII ZECIMALE

100%	$\frac{1}{1}$	$\frac{100}{100}$	1
75%	$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{100}$	0,75
50%	$\frac{1}{2}$	$\frac{50}{100}$	0,50
25%	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{100}$	0,25
10%	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{100}$	0,10

1. FRAȚII ZECIMALE
2. OPERAȚII CU FRAȚII ZECIMALE
3. PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR

Competențe specifice: 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3.



PROIECT • PROVOCARE

Mai aproape de viitor,
învățând cu Excel

A. Dacă veți răspunde „provocării” noastre, atunci:

- ✓ veți ști să realizați un tabel de frecvențe și să-l prelucrați în vederea prezentării în forme sugestive;
- ✓ veți ști să reprezentați prin intermediul aplicației „Excel” diagrame asociate unui șir de date, folosind tabelul de date realizat;
- ✓ veți ști să modificați și să salvați un fișier Excel;
- ✓ veți putea ordona șirul de date și veți putea căuta în șirul de date;
- ✓ veți putea efectua calcule cu datele stocate folosind operații matematice elementare;
- ✓ veți putea calcula media unui set de date numerice;
- ✓ veți putea introduce și veți putea elimina date din șirul construit.

B. Prezentarea soft-ului

1. Realizat de celebra firma de produse program Microsoft și integrat în grupul de produse destinate biroticii Microsoft Office, Excel este cel mai răspândit și mai eficient sistem de calcul tabelar.
2. Excel are direcții variate de utilizare:
 - poate gestiona bazele de date;
 - poate avea aplicații multiple în domeniul financiar contabil;
 - poate ajuta la realizarea profesională a documentelor birotice;
 - poate analiza tendințele statistice ale unui șir de date.

– pentru detalii consultați manualul digital –

C. „Provocări”

- La lecțiile din unitatea 3 a acestui capitol, vor fi plasate iconițele P1, P2, ... cu trimitere la:
- ♦ invitație la lucru;
 - ♦ galeria pentru model de rezolvare explicativă;
 - ♦ video pentru model de rezolvare dinamică.

L1: Construcția unui tabel pentru un șir cunoscut de date.

P1 Invitație la lucru

- a) Produceți șirul de numere consecutive de la 1 la 10 pe coloana A a unui tabel Excel.
- b) Înscrieți în coloana B șirul ordonat: 3, 5, 7, 8, 2, 5, 9, 1, 4, 6.

Salvați fișierul sub numele **P1**.

P1 – Model de rezolvare – explicativ

P1 – Model de rezolvare – video.

1

FRAȚII ZECIMALE

- L1** Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale.
Transformarea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule în fracții ordinare



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

O zecime, o sutime, o miime, o zecime de miime, ..., adică fracțiile ordinare $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$, ... se scriu sub formă de fracții zecimale astfel:

$$\frac{1}{10} = 0,1; \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 0,01; \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 0,001; \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 0,0001; \dots$$

În general, $\frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\dots01}_{n \text{ cifre}}$.

$$\frac{1}{10^n} = 0,\underbrace{00\dots01}_{n \text{ cifre}}$$

Observăm că numărul cifrelor de după virgulă este egal cu numărul zerourilor numitorului (exponentul lui 10 de la numitor)

1. Dacă a este o cifră în baza 10, atunci $\frac{a}{10^n} = 0,\underbrace{00\dots0a}_{n \text{ cifre}}$

2. Dacă fracția este *subunitară*, atunci în fața virgulei se scrie cifra 0, iar între virgulă și cifrele număratorului se completează zerouri pentru ca fracția să aibă exact atâtea zecimale, câte indică exponentul lui 10, de la numitor.

3. Dacă fracția inițială este *supraunitară*, atunci, înainte de virgulă va apărea numărul întregilor fracției.

Cifrele fracției zecimale sunt *exact cifrele număratorului*, în aceeași ordine, *despărțite de virgulă*, astfel încât numărul zecimalilor să fie egal cu exponentul lui 10 de la numitor.

Exemple:

1. $\frac{5}{10} = 0,5$; $\frac{2}{10^2} = 0,02$; $\frac{7}{10^3} = 0,007$.

2. $\frac{99}{100} = 0,99$; $\frac{76}{10^3} = 0,076$; $\frac{96}{10^4} = 0,0096$.

3. $\frac{1235}{10} = 123,5$; $\frac{399}{100} = 3,99$; $\frac{15}{10} = 1,5$;

$\frac{17076}{10^3} = 17,076$; $9 \frac{99}{100} = 9,99$.

În scrierea unei fracții zecimale, numărul natural din fața virgulei reprezintă numărul întregilor fracției sau partea întreagă a fracției.

Cifrele de după virgulă se numesc *zecimale*: zecimi, sutimi, miimi, zecimi de miimi ș.a.m.d.

Exemple: 29 sutimi se scrie: 0,29; 29 zecimi se scrie: 2,9.

Din $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000} = \dots$ fracțiile fiind echivalente, deducem că $0,1 = 0,10 = 0,100 \dots$ adică toate aceste fracții zecimale reprezintă *aceeași parte din întreg*, deci se pot neglija zerourile care apar după ultima zecimală nenulă.

Observație. Numerele naturale se pot scrie sub formă de fracție zecimală cu toate zecimalele egale cu 0.

De exemplu: $1 = 1,0 = 1,00 = \dots$; $7 = 7,0 = 7,00 = \dots$; $123 = 123,0 = 123,00 = \dots$

Concluzie. 1. Orice fracție ordinară cu numitorul o putere a lui 10 se poate scrie, în mod unic, sub formă de fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule.

2. Dacă două fracții ordinare sunt echivalente, atunci ele se exprimă prin aceeași fracție zecimală.



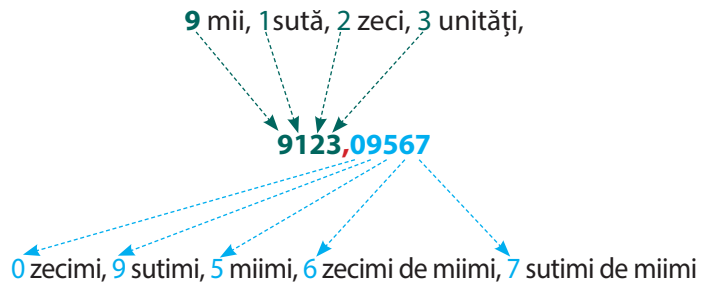
Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

Orice fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule se poate scrie ca fracție ordinară care are numitorul o putere a numărului 10.

În scrierea fracțiilor zecimale, identificăm:

- a) de la virgulă spre stânga: cifra unităților, cifra zecilor, cifra sutelor,...
- b) de la virgulă spre dreapta: cifra zecimilor, cifra sutimilor, cifra miimilor,...



Considerăm fracția zecimală 7,213 care reprezintă 7 întregi, 2 zecimi, 1 sutime și 3 miimi.

$$\text{Putem scrie } 7,213 = \overset{1000)}{7} + \overset{100)}{2} + \overset{10)}{1} + \frac{3}{1000} = \frac{7000}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{7000+200+10+3}{1000} = \frac{7213}{1000}$$

În general, pentru a transforma o fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară, scriem la numărător toate cifrele, suprimând virgula, iar la numitor scriem 10^n , unde n este numărul zecimalelor.

Observație. Dacă partea întreagă este 0, atunci la numărător, se scriu cifrele, începând cu prima cifră nenulă.

Exemple:

- 1) $2,01 = \frac{201}{10^2} = \frac{201}{100}$;
- 2) $0,152 = \frac{152}{10^3} = \frac{152}{1000}$;
- 3) $0,059 = \frac{59}{10^3} = \frac{59}{1000}$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Scrieți cu cifre:
 - a) două zecimi;
 - b) trei sutimi;
 - c) patru miimi;
 - d) cinci zecimi de miimi;
 - e) un întreg și șase zecimi;
 - f) doi întregi, o zecime și șapte sutimi;
 - g) trei întregi și opt miimi.
- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - a) Nouă miimi se exprimă ca fracție zecimală astfel:
 - A. 0,9;
 - B. 0,09;
 - C. 0,009;
 - D. 0,0009.
 - b) O sută douăzeci și trei de sutimi se scrie ca fracție zecimală astfel:
 - A. 0,123;
 - B. 1,23;
 - C. 0,0123;
 - D. 12,3.
 - c) Frația zecimală 4,213 conține:
 - A. 2 zecimi;
 - B. 4213 zecimi;
 - C. 4 zecimi;
 - D. 42 zecimi.
 - d) Partea întreagă a fracției zecimale 5,78 este:
 - A. 5;
 - B. 578;
 - C. 57;
 - D. 78.
- Compețați tabelul următor, folosind modelul prezentat:

Fracția zecimală	Cifra zecimilor	Numărul zecimilor	Cifra sutimilor	Numărul sutimilor	Cifra miimilor	Numărul miimilor
8,72	7	87	2	872	0	8720
0,6						
1,405						
12,0345						

4. Scrieți sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{1}{10}, \frac{71}{10}, \frac{183}{10}, \frac{293}{100}$;

b) $\frac{9}{100}, \frac{43}{100}, \frac{2753}{100}, 7\frac{5}{1000}$;

c) $\frac{7}{1000}, \frac{29}{1000}, \frac{12679}{1000}$;

d) $\frac{1}{10000}, \frac{123}{100000}, \frac{124689}{10^5}$.

5. Folosind modelele:

$$1 + \frac{2}{10} = 1,2; 34 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} = 34,56;$$

$$7 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = 7,831,$$

scrieți următoarele sume sub formă de fracții zecimale.

a) $9 + \frac{1}{10}$; c) $6 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$;

b) $8 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$; d) $21 + \frac{3}{1000}$.

6. Transformați în fracții ordinare ireductibile:

0,3; 1,9; 2,27; 3,25; 4,233; 0,008.

7. Determinați numărul natural n din egalitățile:

a) $8,7 = \frac{n}{10}$; c) $0,027 = \frac{n}{10^3}$;

b) $4,91 = \frac{n}{100}$; d) $1,3579 = \frac{13579}{10^n}$.

8. Amplificați sau simplificați următoarele fracții, așa încât să obțineți numitorii puteri ale lui 10, apoi scrieți fracțiile obținute sub formă de fracții zecimale, folosind modelul prezentat:

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{23}{25}, \frac{171}{50}, \frac{2023}{5000}.$$

Model de rezolvare: $\frac{2023}{5000} = \frac{4046}{10000} = 0,4046$

9. Determinați cifrele a, b, c, d și e , știind că:

a) $\overline{a1c,3e} = 5 \cdot 100 + b \cdot 10 + 7 + \frac{d}{10} + \frac{2}{100}$;

b) $\overline{a4,c1e} = 6 \cdot 10 + b + \frac{3}{10} + \frac{d}{100} + \frac{7}{1000}$.

10. Precizați în care dintre perechile următoare, fracțiile sunt echivalente.

a) $\frac{437}{100}$; 4,37;

b) $\frac{129}{1000}$; 0,129;

c) 15,526; $\frac{125}{8}$.



Minitest

1. Copiați tabelul pe caiete, apoi completați în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F	Propoziția	A/F
$p_1: \frac{123}{100} = 12,3.$		$p_3: \text{Partea întregă a fracției } 43,97 \text{ este } 44.$	
$p_2: 4 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} = 4,567.$		$p_4: \text{Fracția } 0,001 \text{ reprezintă o miime.}$	

2. a) Transformați în fracții zecimale: $\frac{19}{10}, \frac{5043}{100}, \frac{11}{25}$.

b) Transformați în fracții ordinare ireductibile: 2,67; 0,004; 1,2035.

3. Determinați numărul \overline{abcd} , folosind egalitatea: $\frac{127}{4} = \overline{ab,cd}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Compararea și ordonarea fracțiilor zecimale



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Oricare ar fi x și y fracții zecimale, are loc exact una dintre relațiile: $x < y$; $x > y$; $x = y$.

A compara două fracții zecimale x și y înseamnă a stabili care dintre cele trei relații, de mai sus, are loc.

1. Am învățat în lecțiile anterioare să comparăm două fracții ordinare. Cum fracțiile zecimale se pot transforma în fracții ordinare, atunci putem aplica tehnicile învățate deja:

- Orice două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule se pot compara după ce se scriu sub formă de fracții ordinare cu același numitor, o putere a lui 10.
- Se pot compara fracțiile cu un același număr natural, situat între cele două fracții

Exemple. • Comparăm 1,73 și 1,8.

$$1,73 = \frac{173}{100}; 1,8 = \frac{18}{10} = \frac{180}{100}. \text{ Cum } \frac{173}{100} < \frac{180}{100}, \text{ rezultă că } 1,73 < 1,8.$$

- Comparăm 2,1 cu 1,9. Știm că orice fracție este situată între două numere naturale consecutive.

$1 < 1,9 < 2$ și $2 < 2,1 < 3$. Cum 1,9 este mai mic decât 2, iar 2,1 este mai mare decât 2, rezultă $1,9 < 2,1$.

2. Frațiile zecimale pot fi comparate și folosind o regulă practică similară celei de la compararea numerelor naturale.

- Dacă partea întreagă a fracțiilor comparate este reprezentată de numere naturale diferite, atunci este mai mare fracția care are partea întreagă mai mare.

Exemple.

1) $7,3 > 5,9$ pentru că $7 > 5$.

2) $17,98 < 27,1$ pentru că $17 < 27$.

- Dacă fracțiile comparate au aceeași parte întreagă, atunci se compară cifrele zecimilor.

- Dacă cifrele zecimilor sunt diferite, atunci este mai mare fracția pentru care cifra zecimilor este mai mare.
- Dacă cifrele zecimilor sunt egale, atunci se compară cifrele sutimilor.
- Se continuă procedeul până când se identifică prima pereche de cifre de același ordin, distincte.
- Este mai mare fracția care are în etapa anterioară, cifra cea mai mare.

Comparați fracțiile zecimale:

1) 7,3 și 7,1; $7 = 7$ și $3 > 1$, deci $7,3 > 7,1$.

2) 17,98 și 17,99; $17 = 17$, $9 = 9$ și $8 < 9$, deci $17,98 < 17,99$.

3) 0,998763 și 0,998743.

$0 = 0$, $9 = 9$, $8 = 8$, $7 = 7$, $6 > 4$, deci $0,998763 > 0,998743$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

La un concurs este declarat câștigător concurentul care obține punctajul cel mai mare. Ana, Anca, Alex și Andrei participă la concurs și obțin punctajele: 20,05 puncte, 20,1 puncte, 20,19 puncte respectiv 22,002 puncte. Aflați câștigătorul și scrieți cei patru concurenți în ordinea descrescătoare a punctajelor obținute.

Soluție. Din $20 < 22$, rezultă că 22,002 este cea mai mare dintre cele patru fracții zecimale, deci Andrei a câștigat concursul.

Fracțiile 20,05; 20,1; 20,19 au același număr de întregi. Pentru a stabili care este mai mare, comparăm cifra zecimilor.

Din $0 < 1$, rezultă că 20,05 este cea mai mică dintre cele trei fracții. Comparăm acum cifra sutimilor fracțiilor 20,1 și 20,19. Cum $20,1 = 20,10$ și $0 < 9$, rezultă $20,1 < 20,19$.

În concluzie, $22,002 > 20,19 > 20,1 > 20,05$, iar jucătorii, în ordinea descrescătoare a punctajelor, sunt: Andrei, Alex, Anca, Ana.



- A ordona crescător două sau mai multe fracții zecimale, înseamnă a le scrie de la cea mai mică la cea mai mare.
- A ordona descrescător două sau mai multe fracții zecimale, înseamnă a le scrie de la cea mai mare la cea mai mică.

Exemple. Frațiile comparate în problema anterioară sunt în relațiile:

$$22,002 > 20,19 > 20,1 > 20,05 \text{ sau}$$

$$20,05 < 20,1 < 20,19 < 22,002. \text{ Atunci:}$$

- ordonate descrescător: 22,002; 20,19; 20,1; 20,05;
- ordonate crescător: 20,05; 20,1; 20,19; 22,002.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



1. Scrieți pe caiete următoarele perechi de fracții zecimale și subliniați în fiecare pereche fracția mai mare.
 - a) 12,1 și 11,2; c) 2,34 și 2,43;
 - b) 1,6 și 1,5; d) 0,04 și 0,042.
2. Scrieți pe caiete următoarele perechi de fracții zecimale și subliniați în fiecare pereche fracția mai mică.
 - a) 13,8 și 1,38; c) 246,25 și 254,23;
 - b) 9,71 și 9,699; d) 43,7025 și 43,715.
3. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - a) Dacă $6,5 < \overline{a,b} < 6,7$, atunci $\overline{a,b}$ este:
A. 6,51; B. 6,69; C. 6,65; D. 6,6.
 - b) Dacă $1,83 < \overline{a,b,c} < 1,85$, atunci $a + b + c$ este:
A. 13; B. 15; C. 14; D. 17.
 - c) Cea mai mică dintre fracțiile zecimale: 4,5; 4,45; 4,54; 4,51 este:
A. 4,5; B. 4,45; C. 4,54; D. 4,51.
 - d) Cea mai mare dintre fracțiile zecimale: 1,35; 1,351; 1,349; 1,309 este:
A. 1,309; B. 1,349; C. 1,351; D. 1,35.
4. Copiați pe caiete, apoi completați în casetă unul dintre simbolurile $<$, $=$, $>$, astfel încât relația să fie adevărată.
 - a) $8,3 \square 8,4$; c) $3,044 \square 3,4042$;
 - b) $15,49 \square 5,48$; d) $100,11 \square 101,01$;
5. Transformați fracțiile ordinare în fracții zecimale, apoi comparați.
 - a) 6,8 și $\frac{86}{10}$; d) $\frac{13}{5}$ și 2,6;
 - b) $\frac{397}{100}$ și 3,79; e) 9,25 și $\frac{19}{20}$;
 - c) 0,004 și $\frac{4}{100}$; f) 7,04 și $\frac{176}{25}$.
6. Scrieți:
 - a) o fracție zecimală cuprinsă între 4,7 și 4,83;
 - b) două fracții zecimale cuprinse între 1,05 și 1,11;
 - c) toate fracțiile de forma $\overline{a,b,c}$ cuprinse între 10,9 și 11,02.
7. Ordonați crescător fracțiile zecimale: 1,4; 1,39; 1,43; 1,407; 10,395; 1,001.
8. Scrieți:
 - a) trei fracții zecimale mai mari decât 30;
 - b) trei fracții zecimale cuprinse între 9 și 11;
 - c) trei fracții zecimale care au partea întreagă 7 și sunt mai mari decât 7,98.
9. Aflați numerele naturale \overline{abcd} , știind că fracțiile $\overline{4,12}$; $\overline{4,a}$; $\overline{b,3}$; $\overline{4,cd}$; $\frac{433}{100}$ sunt scrise în ordine crescătoare.



Minitest

1. Copiați pe caiete și completați în spațiile libere unul dintre simbolurile $<$, $=$, $>$, astfel încât relația să fie adevărată.

(6x10 p) a) 3,6 ... 3,8;	c) 2,033 ... 2,202;	e) 13,987 ... 13,897;
b) 6,29 ... 6,28;	d) 7,39 ... 7,390;	f) 11,00 ... 10,99;
- (10 p) 2. Scrieți în ordine descrescătoare fracțiile zecimale: $\overline{29,32}$; $\overline{28,999}$; 29.
- (20 p) 3. Aflați numerele naturale \overline{ab} , știind că fracțiile 9,12 ; 9,a; b,4 sunt diferite și sunt scrise în ordine crescătoare. Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Aproximări. Reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Aproximări. Rotunjiri

1. *Aproximarea prin lipsă* a unei fracții zecimale la ordinul unităților, zecimilor, sutimilor, miimilor etc. este *cea mai mare* fracție zecimală formată numai din unități, zecimi, sutimi, miimi etc. *mai mică sau egală* cu fracția dată.

Fie fracția 1,274. Aproximarea prin lipsă la ordinul:

- unităților: $1,2741 \approx 1$ pentru că $1 < 1,2741 < 2$;
- zecimilor: $1,2741 \approx 1,2$ pentru că $1,2 < 1,2741 < 1,3$;
- sutimilor: $1,2741 \approx 1,27$ pentru că $1,27 < 1,2741 < 1,28$.

2. *Aproximarea prin adaos* a unei fracții zecimale la ordinul unităților, zecimilor, sutimilor, miimilor etc. este *cea mai mică* fracție zecimală formată numai din unități, zecimi, sutimi, miimi etc. *mai mare sau egală* cu fracția dată.

Fie fracția 1,274. Aproximarea prin adaos la ordinul:

- unităților: $1,2741 \approx 2$ pentru că $1 < 1,2741 < 2$;
- zecimilor: $1,2741 \approx 1,3$ pentru că $1,2 < 1,2741 < 1,3$;
- sutimilor: $1,2741 \approx 1,28$ pentru că $1,27 < 1,2741 < 1,28$.

3. *Rotunjirea* unei fracții zecimale la ordinul unităților, zecimilor, sutimilor, miimilor etc. este *aproximarea* prin lipsă sau aproximarea prin adaos, la ordinul considerat, care este *cea mai apropiată* de fracția dată.

▪ Rotunjirea la ordinul unităților:
 $1,46 \approx 1$, prin lipsă, $1,46 \approx 2$, prin adaos, iar 1,46 este mai aproape de 1, deci 1,46 se rotunjește la 1.

▪ Rotunjirea la ordinul zecimilor:
 $1,46 \approx 1,4$, prin lipsă, $1,46 \approx 1,5$, prin adaos, iar 1,46 este mai aproape de 1,5, deci 1,46 se rotunjește la 1,5.

4. În cazul în care cele două aproximări sunt *la fel de apropiate* de fracția inițială, *rotunjirea* va fi dată de aproximarea *prin adaos*.

Fie fracția zecimală 19,65. La ordinul zecimilor, aproximarea prin lipsă este 19,6, aproximarea prin adaos este 19,7, iar 19,65 se reprezintă la aceeași distanță față de cele două aproximări. Rotunjirea va fi 19,7.

Regulă practică: Dacă cifra aflată imediat după ordinul de mărime la care efectuăm rotunjirea este 0, 1, 2, 3 sau 4 atunci rotunjirea este egală cu aproximarea prin lipsă. Dacă cifra din dreapta ordinului la care facem rotunjirea este 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci rotunjirea este egală cu aproximarea prin adaos.

Regulile practice pentru aproximarea fracțiilor zecimale, la ordinul zecilor, sutelor, miilor, etc. se pot formula în mod similar.

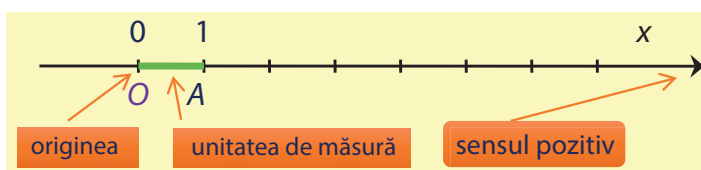
În consecință: Orice fracție zecimală este mai mare sau egală decât orice aproximare prin lipsă a acesteia. Orice fracție zecimală este mai mică sau egală decât orice aproximare prin adaos a acesteia.

Reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Considerăm o dreaptă, pe care am fixat *originea* (punctul O), o *unitate de măsură* (segmentul $OA = 1$) și un *sens*, adică *axa numerelor*.

Fiecărei *fracții zecimale* îi corespunde, în mod unic, un punct M pe axă.

Punctul M se numește *reprezentarea fracției* pe axă, iar fracția dată se numește *coordonata punctului M* pe axă.





Aproximarea fracțiilor zecimale este utilă pentru a estima poziția punctului de reprezentare pe axa numerelor.

Exemplu: Ne propunem să reprezentăm pe axa numerelor fracția 2,735.

1. Aproximăm 2,735, apoi îl rotunjim la unități, zecimi, sutimi.

Ordinul la care se face aproximarea	Aproximare prin lipsă	Aproximare prin adaos	Cifra cu ordin imediat inferior	Rotunjire	Regulă de rotunjire
unități	2	3	7	3	$7 \geq 5$
zecimi	2,7	2,8	3	2,7	$3 < 5$
sutimi	2,73	2,74	5	2,74	$5 \geq 5$

Reprezentarea pe axa numerelor a fracției 2,735, folosind aproximările, este ilustrată mai jos.

1. Stabilim doi întregi consecutivi între care se află fracția, folosind *aproximările la unități*.
2. Divizăm în zecimi unitatea identificată (unitatea cuprinsă între 2 și 3), apoi estimăm poziția reprezentării, folosind *aproximările la zecimi*.
3. Divizăm în sutimi zecimea identificată (între 2,7 și 2,8), apoi estimăm poziția reprezentării, folosind *aproximările la sutimi*.
4. Divizăm în miimi sutimea identificată (între 2,73 și 2,74), apoi estimăm poziția reprezentării.

$$2 < 2,735 < 3$$

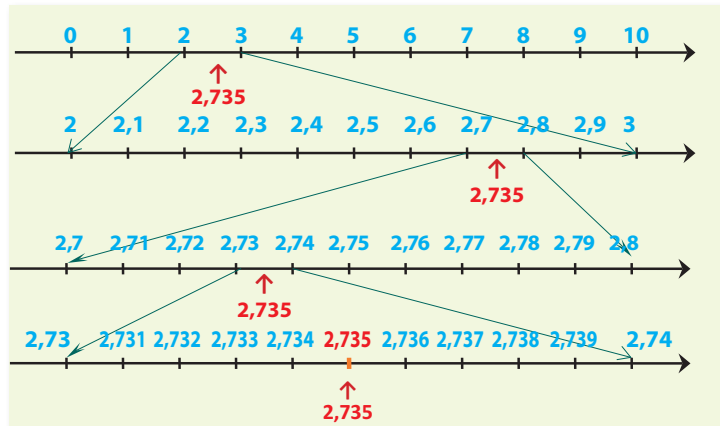
$$2,7 < 2,735 < 2,8$$

$$2,73 < 2,735 < 2,74$$

2,735 se reprezintă pe axă la jumătatea distanței dintre 2,73 și 2,74.

Observație.

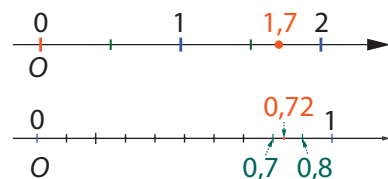
Pentru a ilustra etapele parcurse, am mărit succesiv imaginea, ca și cum am privi la microscop sau am da zoom pe ecran. În realitate, întregul rămâne neschimbat, iar diviziunile devin de 10 ori mai mici la fiecare etapă parcursă.



Evident, nu vom parcurge toate aceste etape la fiecare reprezentare, dar *estimarea poziției punctului* pe axă se face mult mai ușor *dacă folosim aproximări*.

Exemple:

1. Pentru a reprezenta fracția zecimală 1,7 pe axă, știm că se află între 1 și 2, mai aproape de 2 decât de 1, adică între 1,5 și 2.
2. Pentru a reprezenta fracția zecimală 0,72 pe axă, știm că se află între 0,7 și 0,8, mai aproape de 0,7. Alegem o unitate de măsură suficient de mare, divizăm unitatea în zecimi, apoi facem reprezentarea.



Reprezentarea pe axă este de multe ori utilă pentru a *compara fracțiile* și pentru a stabili *ordinea crescătoare sau descrescătoare* a acestora.

Două sau mai multe fracții se reprezintă pe axa numerelor, în ordine crescătoare, de la stânga spre dreapta (în sensul pozitiv al axei).



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați pe caiete, apoi completați tabelul următor după model:

Frația zecimală	Aproximare prin lipsă la ordinul			Aproximare prin adaos la ordinul		
	unităților	zecimilor	sutimilor	unităților	zecimilor	sutimilor
3,126	3	3,1	3,12	4	3,2	3,13
1,874						
0,378						
27,003						
1008,7002						

2. Se consideră fracția zecimală 3,7385.

Asociați fiecărei *litere* care indică ordinul de rotunjire a fracției date, scris în coloana **A**, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana **B**.

A	B
a. Rotunjire la ordinul unităților	1. 3,74
b. Rotunjire la ordinul zecimilor	2. 3,7
c. Rotunjire la ordinul sutimilor	3. 4
d. Rotunjire la ordinul miimilor	4. 3,739
	5. 3,73

3. Rotunjiți fracția 1,3829826 la ordinul:

- a) unităților; c) miimilor;
b) zecimilor; d) zecimilor de miimi.

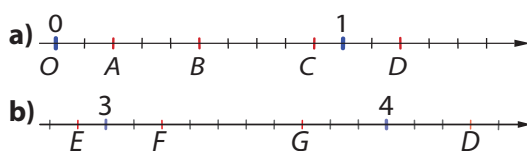
4. Reprezentați pe axa numerelor:

- a) 1,2; 1,4 și 1,7; b) 0,5; 1,4; 2,3; 3,2.

5. Reprezentați pe axa numerelor, folosind aproximări:

- a) 1,25; 1,75 și 3,78; b) 0,6; 2; 1,7; 2,4.

6. Precizați coordonatele punctelor reprezentate pe axă.



7. Determinați:

- a) numărul natural n cu proprietatea $n < 402,35 < n + 1$;
b) numerele naturale a și b astfel încât $\overline{a,b} < 17,38 < \overline{a,(b+1)}$;

8. Determinați:

- a) cel mai mare număr \overline{abcd} în baza zece, pentru care $\overline{a,bc} < 7,685 < \overline{a,bd}$.
b) toate fracțiile zecimale $\overline{a,bc}$ pentru care $1,74; \overline{a,bc}; 1,801$ sunt scrise în ordine crescătoare.

9. Scrieți cele mai apropiate încadrări posibile ale fracțiilor zecimale: 11,23; 125,476; folosind:

- a) numere naturale;
b) fracții zecimale cu o singură zecimală;
c) fracții zecimale cu două zecimale.

Model: pentru 2,47 avem:

- a) $2 < 2,47 < 3$;
b) $2,4 < 2,47 < 2,5$;
c) $2,46 < 2,47 < 2,48$.

10. Aproximați la zecimi numărul $7 \cdot a \cdot b$, unde

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} \text{ și}$$

$$b = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{99}\right).$$





Minitest

(5x10 p) **1.** Se consideră fracția zecimală 2,9185. Asociați fiecărei *litere* care indică ordinul de rotunjire sau de aproximare a fracției date, scris în coloana **A**, *cifra* corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana **B**.

(20 p) **2.** Precizați numărul fracțiilor zecimale, cu două zecimale, cuprinse între 2,34 și 2,4. Scrieți cea mai mică fracție și cea mai mare fracție dintre acestea.

(20 p) **3.** Precizați fracțiile zecimale care se reprezintă pe axă în punctele *A, B, C, D, E*.



Se acordă 10 puncte din oficiu.

A	B
a. Rotunjire la ordinul unităților	1. 2,92
b. Rotunjire la ordinul zecimilor	2. 2,9
c. Rotunjire la ordinul sutimilor	3. 3
d. Rotunjire la ordinul miimilor	4. 2,919
e. Aproximarea prin lipsă la ordinul miimilor	5. 2
	6. 2,918

Test de evaluare / autoevaluare

I. Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

(5p) **1.** Frația $\frac{1}{10}$ se scrie sub formă de fracție zecimală:

(5p) **2.** Cifra zecimilor fracției 3,78 este

(5p) **3.** Numărul sutimilor fracției 10,23 este

(5p) **4.** Partea întreagă a fracției 51,078 este

II. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

(5p) **1.** Aproximarea prin lipsă la zecimi a fracției 5,79 este:

A. 5; **B.** 5,7; **C.** 5,8; **D.** 6.

(5p) **2.** Dintre fracțiile 0,321; 0,312; 0,3121; 0,322, cea mai mică este:

A. 0,321; **B.** 0,3121; **C.** 0,312 **D.** 0,322.

(5p) **3.** Frația zecimală 2,436 este mai mare decât fracția:

A. 2,438; **B.** 2,441; **C.** 2,439; **D.** 2,429.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1. Scrieți:

(5p) **a)** trei fracții zecimale cuprinse între 3 și 4;

(5p) **b)** trei fracții zecimale cuprinse între 2,97 și 3

(5p) **c)** trei fracții zecimale cuprinse între 1,75 și 1,77.

2.

(10p) **a)** Scrieți ca fracție zecimală $1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$ și precizați zecimalele fracției obținute.

(5p) **b)** Scrieți ca fracție zecimală $\frac{2}{10} + \frac{4}{1000}$ și precizați partea întreagă a fracției obținute.

3.

(15p) **a)** Determinați fracțiile zecimale $\overline{a,b}$, știind că $0,8 < \overline{a,b} < 1,13$.

(10p) **b)** Alegeți unitatea de măsură potrivită și reprezentați pe axa numerelor fracțiile zecimale determinate la subpunctul **a**).

Se acordă 10 puncte din oficiu.



2 OPERAȚII CU FRAȚII ZECIMALE



L1 Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Lui Matei îi place să meargă cu bicicleta și folosește o aplicație care îi afișează distanța parcursă într-o perioadă de timp. În ultimele două zile, aplicația a afișat 12,123 km, respectiv 6,873 km. Ce distanță a parcurs Matei, în total, în aceste zile?

Rezolvare. Trebuie să calculăm suma fracțiilor zecimale 12,123 și 6,873.

Știm să calculăm suma a două fracții ordinare. Fraacțiile zecimale 12,123 și 6,873 se

pot scrie: $12,123 = 12 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}$ respectiv $6,873 = 6 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}$.

Deducem că $12,123 + 6,873 = \left(12 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000}\right) + \left(6 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}\right)$.

Folosind *asociativitatea și comutativitatea adunării fracțiilor ordinare*, obținem:

$$12,123 + 6,873 = (12 + 6) + \left(\frac{1}{10} + \frac{8}{10}\right) + \left(\frac{2}{100} + \frac{7}{100}\right) + \left(\frac{3}{1000} + \frac{3}{1000}\right) = 18 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{6}{1000} = 18,996.$$

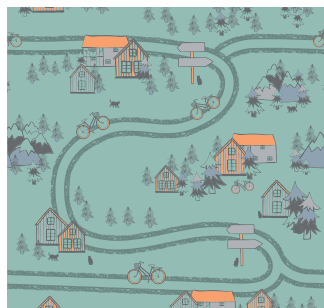
Răspuns: Matei a parcurs 18,996 km în cele două zile.

În acest exemplu, sumele cifrelor de același ordin sunt mai mici decât 10 (nu depășesc ordinul).

Observăm că pentru a calcula suma fracțiilor zecimale, *putem aduna cifrele de același ordin*, suma lor fiind cifra corespunzătoare acestui ordin, în rezultatul adunării.

Dacă suma cifrelor de un anumit ordin este mai mare sau egală cu 10, atunci vom ține cont de faptul că:

10 *unități* reprezintă o zece; 10 *zecimi* reprezintă o unitate; 10 *sutimi* reprezintă o zecime; 10 *miimi* reprezintă o sutime ș.a.m.d.



Regulă practică: Adunarea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule

- Se așază fracțiile una sub alta, *virgulă sub virgulă*. Vom avea cifrele de același ordin *una sub alta*. Dacă una dintre fracții nu are cifră de un anumit ordin, aceasta este 0.
- Se adună, de la dreapta spre stânga, cifrele de același ordin.
 - Dacă *suma cifrelor* este mai mică decât 10, se scrie la rezultat și se repetă pasul 2, la ordinul imediat superior.
 - Dacă *suma cifrelor* este mai mare decât 10, atunci se scrie la rezultat doar *cifra unităților*, cifra zecilor reprezentând o unitate de ordin superior, care se păstrează și se adaugă la suma cifrelor de ordin imediat superior.
- Se continuă procedeul până se termină cifrele celor două fracții.
- Scriem *virgula* la rezultat *sub virgulele* celor două fracții.

Exemplu: 1. Calculăm $12,123 + 6,873$.

$$\begin{array}{r} 12,123 + \\ 6,873 \\ \hline 18,996 \end{array}$$

$3 + 3 = 6;$ $2 + 7 = 9;$
 $1 + 8 = 9;$ $2 + 6 = 8;$
 $1 + 0 = 1;$

$$12,123 + 6,873 = 18,996.$$

2. Calculăm $12,163 + 5,86$.

$$\begin{array}{r} 12,163 + \\ 5,86 \\ \hline 18,023 \end{array}$$

$3 + 0 = 3;$
 $6 + 6 = 12 = 10 + 2;$
 $1 + 8 = 9;$ $9 + 1 = 10 + 0;$
 $2 + 5 = 7;$ $7 + 1 = 8;$

$$12,163 + 5,86 = 18,023 \quad 1 + 0 = 1.$$

Folosind proba adunării, egalitatea $a + b = c$, unde a, b, c sunt fracții zecimale, se poate scrie $a = c - b$ sau $b = c - a$.

Deducem că și scăderea fracțiilor zecimale se realizează printr-o succesiune de pași, descriși mai jos.

Regulă practică: Scăderea fracțiilor zecimale cu număr finit de zecimale nenule

- Se așază fracția mai mică sub fracția mai mare, virgulă sub virgulă. Vom avea cifrele de același ordin una sub alta. Dacă una dintre fracții nu are cifră de un anumit ordin, aceasta este 0.
- Se scad, de la dreapta spre stânga, cifrele de același ordin.
 - Dacă cifra de la prima fracție este mai mare sau egală decât cea de la a doua fracție, se scrie diferența la rezultat și se trece la ordinul imediat superior.
 - Dacă cifra de la prima fracție este mai mică decât cea de la a doua fracție, se împrumută o unitate de ordin superior, adică 10 unități de ordinul dorit, apoi se calculează diferența și se scrie la rezultat.
- Se continuă procedeul până se termină cifrele celor două fracții.
- Scriem virgula la rezultat sub virgulele celor două fracții.

Observație. Când numărul zecimalelor semnificative (începând de la virgulă până la ultima zecimală nenulă, inclusiv) ale primei fracții este mai mic decât cel al zecimalelor semnificative ale celei de-a doua fracții, se recomandă completarea acestora cu zerouri, pentru a nu le pierde din vedere.

Exemple:

1. Calculăm $17,823 - 5,812$.

$$\begin{array}{r} 17,823 - \\ \underline{5,812} \\ 12,011 \end{array}$$

$3 - 2 = 1; \quad 2 - 1 = 1;$
 $8 - 8 = 0; \quad 7 - 5 = 2;$
 $1 - 0 = 1;$

$$17,823 - 5,812 = 12,011.$$

2. Calculăm $13,163 - 5,86$.

$$\begin{array}{r} 13,163 - \\ \underline{5,86} \\ 7,303 \end{array}$$

$3 - 0 = 3;$
 $6 - 6 = 0;$
 $11 - 8 = 3;$
 $12 - 5 = 7.$

$$\begin{array}{r} 13,1600 - \\ \underline{11,8542} \\ 1,3058 \end{array}$$

$10 - 2 = 8; \quad 9 - 4 = 5;$
 $5 - 5 = 0; \quad 11 - 8 = 3.$
 $2 - 1 = 1; \quad 1 - 1 = 0.$
 $13,16 - 11,8542 = 1,3058.$

Adunarea fracțiilor zecimale are aceleași proprietăți cu adunarea fracțiilor ordinare.

Scăderea fracțiilor zecimale are aceleași proprietăți cu scăderea fracțiilor ordinare.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Patru prieteni, cam grăbiți, au calculat suma

$$23,41 + 1,834 \text{ astfel:}$$

Tom: $\begin{array}{r} 23,41 + \\ \underline{1,834} \\ 4,175 \end{array}$ Mara: $\begin{array}{r} 23,41 + \\ \underline{1,834} \\ 24,244 \end{array}$

Cristi: $\begin{array}{r} 23,41 + \\ \underline{1,834} \\ 25,244 \end{array}$ Mira: $\begin{array}{r} 23,410 + \\ \underline{1,834} \\ 24,444 \end{array}$

a) Efectuați adunarea și decideți care dintre ei a calculat corect.

b) Identificați greșelile pe care le-au făcut ceilalți.

2. Știind că $60,03 - \overline{c,d} = 55,23$, aflați folosind proba scăderii, fracția $\overline{c,d}$ și diferența $d - c$.

a) Cristi a calculat corect.

$23,410 + \underline{1,834} = 25,244$
 $0 + 4 = 4 < 10; \quad 1 + 3 = 4 < 10;$
 $4 + 8 = 12 > 10. \quad 12 = 10 + 2;$
 Scriem 2 (zecimi) și păstrăm 1 unitate.
 $3 + 1 = 4$ și $4 + 1 = 5 < 10; \quad 2 + 0 = 2.$

b) Tom nu așază cifrele de același ordin una sub alta, deci nu adună cifrele de același ordin. Mara uită unitatea rezultată din adunarea zecimilor celor două fracții ($4 + 8 = 12$). Mira calculează greșit $4 + 8$.

Din $60,03 - \overline{c,d} = 55,23$, rezultă $\overline{c,d} = 60,03 - 55,23 = 4,8$, deci $c = 4$ și $d = 8$, deci $d - c = 4$.





Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Efectuați adunările:

- a) $4,3 + 1,5$; d) $3 + 4,5$;
 b) $2,31 + 5,67$; e) $0,24 + 3,579$;
 c) $1,099 + 6,736$; f) $0,679 + 37,5$;

2. Calculați:

- a) $4,57 + 3,9$; c) $106 + 0,5 + 23,24$;
 b) $106,8 + 5,34$; d) $\frac{75}{100} + 1,25$.

3. Folosiți proprietățile adunării pentru a calcula cât mai rapid.

Model. $15,9 + 19,7 + 4,1 = 15,9 + 4,1 + 19,7 =$
 $= (15,9 + 4,1) + 19,7 = 20 + 19,7 = 39,7$.

- a) $2,4 + 1,5 + 7,6$;
 b) $1,25 + 5,2 + 4,8 + 8,75$;
 c) $10,01 + 20,22 + 2,99$.
4. Corina a cumparat un stilou cu 22,5 lei, un caiet cu 4,75 lei și un echer cu 3,5 lei. Calculați ce sumă a achitat Corina pentru toate obiectele cumpărate.
5. Efectuați scăderile:

- a) $7,8 - 5,2$; d) $7 - 3,4$;
 b) $8,74 - 2,53$; e) $5,26 - 3,025$;
 c) $0,482 - 0,174$; f) $40,386 - 31,6$.

6. Copiați tabelul pe caiete, efectuați calculele și completați rezultatele în casetele libere.

	a	b	$a + b$	$a - b$
1.	17,5	12,3		
2.	21,7	17,39		
3.	8,39		10,5	
4.	28,29			17

7. Calculați:

- a) $4,25 - 0,175$; c) $6,5 - 0,98 - 3,54$;
 b) $305 - 127,444$; d) $\frac{841}{100} - 1,41$.

8. Unul dintre termenii adunării este 17,5, iar suma este 54. Aflați celălalt termen.

9. Diferența a două numere este 12,3. Cel mai mare număr este 48,6. Aflați celălalt număr.

10. Suma a două fracții este 621,8, iar unul dintre termeni este 17,3. Aflați celălalt termen.

11. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- a) Diferența dintre fracțiile 103,31 și 30,13 este:
A. 73,08; **B.** 73,18; **C.** 70,28; **D.** 72,18.
 b) Frația cu 2,05 mai mare decât 25 este:
A. 225; **B.** 25,25; **C.** 25,05; **D.** 27,05.
 c) Frația cu 25,5 mai mică decât 255 este:
A. 229,5; **B.** 230,5; **C.** 210,5; **D.** 225.
 d) Rezultatul calculului $1,27 + 45 - 38,123$ este:
A. 81,47; **B.** 84,393; **C.** 8,147; **D.** 8,137.

12. a) Determinați a din egalitatea $a - 8,5 = 9,4$, folosind proba scăderii.

b) Determinați b din egalitatea $b + 3,44 = 3,55$, folosind proba adunării.

c) Aflați cu cât este mai mare fracția 102,304 decât fracția 99,8.

d) Aflați cu cât este mai mică fracția 25,03 decât fracția $\frac{261}{10}$.

13. Un camion încărcat cu lemne cântărește 8,75 tone. Știind că lemnele cântăresc 5,4 tone, aflați cât cântărește camionul fără încărcătură.

14. Din recolta de 1,275 tone de legume, un fermier a vândut 0,988 tone. Calculați cantitatea de legume cu care a rămas fermierul.

15. Dintr-un balot de stofă de 100 m, s-au vândut într-o zi 38,25 m, iar în altă zi, cu 7,65 m mai mult. Calculați lungimea bucății rămase.

16. Adrian și Andreea au economisit împreună 3456,7 lei. Aflați ce sumă a economisit fiecare, știind că Adrian a ecomisit cu 54,7 lei mai puțin decât Andreea.

17. Calculați:

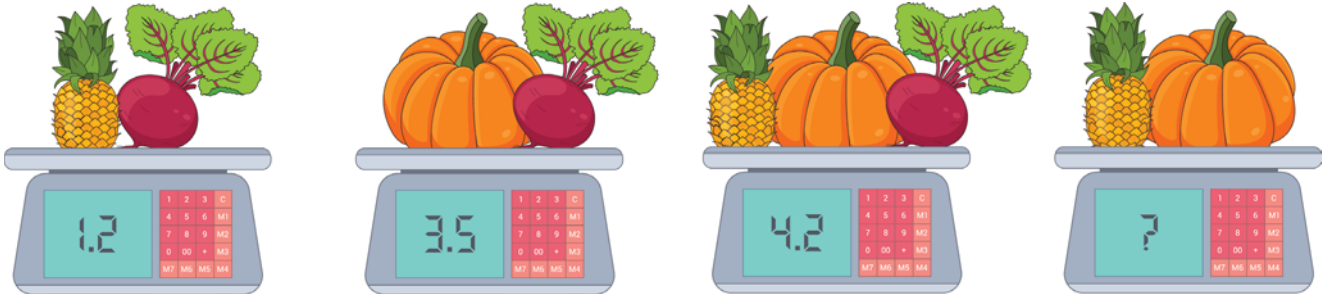
- a) $0,65 + 75,93 - 12,55$;
 b) $206,4 - (200,02 - 193,5)$;
 c) $1000 - (1000 - 958,7)$.

18. Dacă $a + b + c = 10$, aflați suma: $\overline{a,bc} + \overline{c,ab} + \overline{b,ca}$.

19. Determinați $x = \overline{0,ab} + \overline{0,bc} + \overline{0,ca}$, știind că $a + b + c = 12$.

20. Aflați $a + b$, știind că $\overline{a,b} + \frac{17}{100} = 3,57$, folosind proba adunării.

- 21. a)** Dați exemplu de două fracții a căror sumă este 127,56.
b) Dați exemplu de două fracții a căror diferență este 93,47.
- 22.** Determinați cifrele nenule a și b care fac adevărată relația $a, b + b, a = 5,5$.
- 23.** Dacă se măresc descăzutul cu 7 și scăzătorul cu 2,5, calculați cu cât se mărește diferența inițială.
- 24.** Se consideră fracțiile zecimale $a = 128,37$ și $b = 49,5$. Calculați:
a) suma numerelor;
b) diferența numerelor;
c) diferența dintre suma numerelor și diferența acestora;
d) suma dintre suma numerelor și diferența acestora.
- 25.** Observați cântarele. Se știe că obiectele de același fel care apar au aceeași masă.



- a)** Aflați cât cântărește marfa de pe cele 4 cântare.
b) Aflați cât cântărește marfa de pe primele 3 cântare.
c) Aflați ce ar trebui să apară pe ecranul ultimului cântar.
d) Aflați cât cântărește ananasul.
e) Aflați cât cântărește sfecla.
f) Aflați cât cântărește dovleacul.



Minitest

- 1.**
 (15 p) **a)** Aflați cu cât este mai mare fracția 4,2 decât 1,25.
 (15 p) **b)** Aflați cu cât este mai mică fracția 17,48 decât 25,011.
 (20 p) **2.** Dintr-o panglică, cu lungimea 60 metri, Bianca taie o bucată de 16,75 m, Victor, taie o altă bucată, cu 4,35 cm mai scurtă. Aflați ce lungime are panglica rămasă.



- 3.** Fie $a = 67,37 - 37,184$, $b = 123 - (63,5 + 29,32)$ și $c = 61,413 - (108,92 - 77,707)$.
 (30 p) **a)** Aflați fracțiile zecimale a , b , c .
 (10 p) **b)** Ordonăți crescător cele trei fracții.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L2 Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule



Ne amintim

Un medicament sub formă de comprimate cu *masa* de 2,73 g este prezentat sub formă de blistere (folii) cu câte 10 comprimate, sau în flacoane a câte 100 de comprimate.

- Calculați masa pe care o au medicamentele conținute de o folie.
- Calculați masa pe care o au medicamentele conținute de un flacon.
- Aflați cât cântărește jumătate dintr-un comprimat.



Rezolvarea cerințelor a) și b) presupune calculul produsului dintre masa unui comprimat și numărul comprimatelor, adică $2,73 \cdot 10$, pentru a) și $2,73 \cdot 100$, pentru b). În ambele cazuri se înmulțește o fracție zecimală cu puteri ale lui 10. Dacă exprimăm fracțiile zecimale sub formă de fracții ordinare, obținem

$$2,73 \cdot 10 = \frac{273}{100} \cdot 10 = \frac{273}{10} = 27,3 \text{ și } 2,73 \cdot 100 = \frac{273}{100} \cdot 100 = \frac{273}{1} = 273.$$

c) Avem de calculat $2,73 \cdot 0,5$. Dacă exprimăm ambele fracții zecimale sub formă de fracții ordinare, obținem

$$0,5 \cdot 2,73 = \frac{5}{10} \cdot \frac{273}{100} = \frac{273 \cdot 5}{10^3} = \frac{1365}{10^3} = 1,365.$$

Observăm că la subpunctele a) și b), cifrele rezultatului coincid cu cifrele fracției inițiale, poziția virgulei, fiind mai spre dreapta, cu o cifră, la înmulțirea cu 10 și cu două cifre la înmulțirea cu 100.

Concluzie. Produsul dintre o fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule și o putere a lui 10, este fracția zecimală obținută mutând virgula de la stânga la dreapta peste atâtea cifre câte indică exponentul puterii cu care înmulțim.

La subpunctul c), observăm că se înmulțesc numerele naturale de la numărător și că rezultatul are trei zecimale, adică atâtea câte au cei doi factori, împreună.

Concluzie.

- Produsul dintre două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule revine la înmulțirea numerelor făcând abstracție de virgulă și plasarea ulterioară a virgulei, de la dreapta la stânga, peste atâtea cifre, nu neapărat nenule, câte ne indică suma dintre numărul zecimalelor primei fracții și numărul zecimalelor celei de-a doua.
- Produsul dintre o fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule și un număr natural revine la înmulțirea numerelor făcând abstracție de virgulă și plasarea ulterioară a virgulei, de la dreapta la stânga, peste atâtea cifre, nu neapărat nenule, câte are fracția zecimală inițială.

Regulă practică: înmulțirea a două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule

- Se scriu fracțiile una sub alta, aliniindu-le, de regulă, de la dreapta la stânga.
- Se calculează, de la dreapta la stânga, produsele dintre câte o cifră a celei de-a doua fracții și prima fracție (produse parțiale) și se aranjează unele sub altele, astfel încât ultima cifră a fiecărui produs parțial să fie sub cifra pe care o înmulțim, în această etapă.

Exemplu:

$$\begin{array}{r} 1,72 \cdot 5 = 860 \\ 3,5 \cdot 3 = 516 \\ \hline 860 \\ + \\ 516 \\ \hline 6,020 \\ 1,72 \cdot 3,5 = 6,02. \end{array}$$



Dicționar

comprimat = medicament de consistență solidă obținut prin reducerea acestuia în stare de pulbere și amestecarea cu un liant; pastilă, tabletă, bulină.

masa = cantitatea de materie a unui corp.



- Calculăm suma produselor parțiale, respectând aranjarea realizată.
- Plasăm virgula numărând, de la dreapta la stânga zecimalele, astfel încât numărul zecimalelor produsului, nu neapărat nenule, să fie egal cu suma dintre numărul zecimalelor primei fracții și numărul zecimalelor celei de-a doua.

Observație. Dacă un produs parțial este 0, acesta nu se scrie, dar avem grijă să nu greșim poziția ultimei cifre a următorului produs parțial.

Exemplu:

$$\begin{array}{r}
 5,32 \cdot \\
 3,07 \\
 \hline
 3724 + \\
 1596 \\
 \hline
 16,3324
 \end{array}$$

$532 \cdot 7 = 3724$
 $532 \cdot 0 = 0$
 $532 \cdot 3 = 1596$

$$5,32 \cdot 3,07 = 16,3324.$$

Operația de înmulțire a fracțiilor zecimale are aceleași proprietăți ca și operația de înmulțire a fracțiilor ordinare.

Dacă x este o fracție zecimală, atunci produsul $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ se notează x^n și se numește puterea a n -a a fracției x .

Proprietățile puterilor, cunoscute de la fracții ordinare, rămân valabile și pentru puterile fracțiilor zecimale.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Exerciții rezolvate

1. Asociați fiecărei litere care indică o înmulțire, scrisă în coloana **A**, cifra corespunzătoare răspunsului corect, aflat în coloana **B**.

A	B
a. $1,225 \cdot 10 =$	1. 125
b. $1,225 \cdot 100 =$	2. 1,25
c. $0,125 \cdot 1000 =$	3. 12,5
d. $0,025 \cdot 50 =$	4. 122,5
	5. 12,25

2. Folosind doar regula de înmulțire a unei fracții zecimale cu puteri ale lui 10, aflați fracția zecimală x pentru fiecare dintre egalitățile:

- a) $x \cdot 10 = 63,2$;
 b) $100 \cdot x = 3,67$;
 c) $x \cdot 1000 = 324,7$.

3. Considerăm fracțiile zecimale $a = 0,25$; $b = 1,75$ și $c = 4,25$.

- a) Calculați $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c$;
 b) Calculați $c^2 - a \cdot c - b \cdot c$.

Rezolvare:

1. $1,225 \cdot 10 = 12,25$ (am mutat virgula, la dreapta, peste o cifră), deci ($a \rightarrow 3$);
 $1,225 \cdot 100 = 122,5$ (am mutat virgula, la dreapta, peste două cifre), deci ($b \rightarrow 4$);
 $0,125 \cdot 1000 = 125$ (am mutat virgula, la dreapta, peste trei cifre), deci ($c \rightarrow 1$);
 $0,025 \cdot 50 = 0,025 \cdot 5 \cdot 10 = 5 \cdot 0,025 \cdot 10 = 5 \cdot (0,025 \cdot 10) = 5 \cdot 0,25$
 Am folosit **comutativitatea** și **asociativitatea** înmulțirii.
 Este avantajos ca primul factor să fie fracția cu mai multe cifre (pentru a avea mai puține produse parțiale). Cum $25 \cdot 5 = 125$, iar fracția 0,25 are două zecimale, obținem $5 \cdot 0,25 = 1,25$, deci ($d \rightarrow 2$);

2. a) Din $x \cdot 10 = 63,2$, rezultă că fracția zecimală 63,2 se obține din fracția zecimală x , prin deplasarea virgulei, spre dreapta, peste o cifră. Atunci, $x = 6,32$.

b) Din $100 \cdot x = 3,67$, rezultă că fracția zecimală 3,67 se obține din fracția zecimală x , prin deplasarea virgulei, spre dreapta, peste două cifre. Atunci, $x = 0,0367$.

c) Din $x \cdot 1000 = 324,7$, rezultă că fracția zecimală 324,7 se obține din fracția zecimală x , prin deplasarea virgulei, spre dreapta, peste trei cifre. Atunci $x = 0,3247$.

3. a) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b \cdot c = a \cdot (b + c + b \cdot c) = 0,25 \cdot (1,75 + 4,25 + 1,75 \cdot 4,25) = 0,25 \cdot (6 + 7,4375) = 0,25 \cdot 13,4375 = 3,359375$.

b) Dăm factor comun fracția zecimală c și obținem:
 $c^2 - a \cdot c - b \cdot c = c \cdot (c - a - b) = 4,25 \cdot (4,25 - 0,25 - 1,75) = 4,25 \cdot (4 - 1,75) = 4,25 \cdot 2,25 = 9,5625$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Calculați în două moduri, folosind modelul:

- a) $2,5 + 2,5 + 2,5$;
 b) $3,78 + 3,78 + 3,78 + 3,78 + 3,78$;
 c) $1,234 + 1,234 + 1,234 + 1,234$.

Model. I. $2,5 + 2,5 + 2,5 = 5 + 2,5 = 7,5$;

II. $2,5 + 2,5 + 2,5 = 3 \cdot 2,5 = 7,5$.

2. Efectuați calculele:

- a) $10 \cdot 3,8$; d) $9,007 \cdot 100$;
 b) $10 \cdot 6,84$; e) $2,468 \cdot 1000$;
 c) $100 \cdot 5,183$; f) $1000 \cdot 0,0367$.

3. Efectuați înmulțirile:

- a) $2 \cdot 3,2$; c) $4 \cdot 2,6$; e) $0,7 \cdot 45$;
 b) $3 \cdot 1,3$; d) $13 \cdot 6,7$; f) $0,54 \cdot 30$.

4. Calculați:

- a) $3,8 \cdot 2,5$; c) $16,64 \cdot 0,5$;
 b) $23,4 \cdot 1,8$; d) $4,225 \cdot 70,4$.

5. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Frația zecimală de șapte ori mai mare decât 2,5 este:

- A. 17,5; B. 17,3; C. 16,5; D. 18,5.

b) Delia cumpără 4 kg de cartofi cu 3,25 lei kilogramul. Suma de bani pe care o achită este:

- A. 12 lei; B. 13 lei; C. 11 lei; D. 13,5 lei.

c) Produsul $3,5 \cdot 2,7$ este egal cu:

- A. 9,55; B. 8,65; C. 9,45; D. 8,35.

d) Rezultatul calculului $4 \cdot 2,6 + 4 \cdot 7,3$ este:

- A. 36,9; B. 39,16; C. 36,6; D. 39,6.

6. Copiați pe caiete, apoi completați în spațiile libere răspunsul corect.

- a) Produsul dintre 8,4 și 0,75 este
 b) Rezultatul calculului $40 \cdot 5,6 \cdot 2,25$ este

c) Calculați $a \cdot b$, știind că $a = \frac{873}{100}$ și $b = 25$.
 d) Calculați $c \cdot m + c \cdot n$, știind că $c = 4,8$ și $m + n = 0,125$.

7. Folosind, eventual, comutativitatea și asociativitatea înmulțirii, efectuați:

- a) $0,1 \cdot 47 \cdot 10$; b) $0,51 \cdot 34 \cdot 100$; c) $1000 \cdot 3,8 \cdot 0,225$.

8. Identificați factorul comun și efectuați calculele:

- a) $0,5 \cdot 2,7 + 0,5 \cdot 4,3$; b) $2,4 \cdot 6,48 - 2,4 \cdot 4,98$;
 c) $4,25 \cdot 5,7 - 4,25 \cdot 2,3$; d) $2 \cdot \overline{a,b} - \overline{a,b} \cdot 0,7 + \overline{a,b} \cdot 8,7$.

9. Printr-un robinet care alimentează o piscină, curg într-o oră 350,5 litri apă. Calculați câți litri de apă se strâng în piscină în:

- a) 1,5 ore; b) 4,8 ore.

10. Un autoturism consumă 0,16 litri benzină, la fiecare kilometru parcurs. Aflați cantitatea de benzină consumată pe distanțele:

- a) 10 km; b) 500 km.

11. a) Dacă $a = 7,8$ și $b + c = 10,5$, calculați $a \cdot b + a \cdot c$;



b) Dacă $a = 4,5$ și $b - c - 2 = \frac{53}{10}$, calculați $a \cdot b - a \cdot c$.

12. Efectuați calculele:

- a) $6,8 \cdot (3,21 + 4,29)$;
 b) $7,03 \cdot (153,27 - 113,07)$;
 c) $(9,8 + 7) \cdot (9,8 - 7)$.



Minitest

1. Calculați :

- (15 p) a) fracția zecimală de cinci ori mai mare decât 8,3;
 (15 p) b) fracția zecimală de o sută de ori mai mare decât 9,061;
 (15 p) c) produsul dintre fracția zecimală 2,5 și suma $0,9 + 0,12$;
 (15 p) d) fracția zecimală, rezultat al calculului $4,5 \cdot 13,8 - 4,5 \cdot \frac{93}{10}$.

(15 p) 2. Un fermier obține o recoltă de 4,75 kg cartofi de pe o suprafață de 1 metru pătrat. Calculați cantitatea de cartofi pe care o obține de pe un teren cu suprafața 450 m^2 .

(15 p) 3. Într-o zi, la un magazin, s-au vândut dimineața 120,6 kg fructe, iar după-amiaza o cantitate de fructe de 3 ori mai mare. Aflați cantitatea de fructe vândute în acea zi.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



L3 Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multe numere naturale



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Roxana și Robert au făcut cumpărături pentru participanții la un concurs al elevilor clasei. Roxana a plătit 249 de lei pe 3 cupe de același fel, pentru premianți, iar Robert a plătit 435 de lei pe 25 de albume pentru poze, de același fel.

- Calculați *prețul* unei cupe.
- Calculați *prețul* unui album.

Rezolvare.

- Dacă trei cupe cu același preț au costat 249 de lei, atunci o cupă a costat $249 : 3$ (lei). Pentru că 249 este divizibil cu 3 (suma cifrelor este 15, care se divide la 3), rezultă că rezultatul este un număr natural, $249 : 3 = 83$ (lei). Prețul unei cupe este 83 lei.
- Dacă 25 de albume au costat 435 lei, atunci un album a costat $435:25$, care se scrie ca fracție ordinară sub

forma $\frac{435}{25} = \frac{1740}{100} = 17,40$ (lei). Un album foto a costat 17,40 lei.



Din exemplele de mai sus, deducem că *rezultatul împărțirii a două numere naturale este o fracție zecimală*. Orice număr natural se poate scrie ca fracție zecimală în forma $n = n,000\dots$, cu câte zerouri dorim, ele nefiind semnificative.

Regulă practică: Împărțirea numerelor naturale cu rezultat fracții zecimale

- Oricare ar fi numerele naturale m și n , cu $n \neq 0$, are sens împărțirea $m:n$.

Sunt posibile situațiile:

- Dacă m este divizibil cu n , atunci rezultatul împărțirii este un *număr natural*. (Exemplul 1))
- Dacă m nu este divizibil cu n , atunci:
 - efectuăm împărțirea numărătorului la numitor până la cifra unităților, ca la împărțirea numerelor naturale.
 - plasăm virgula la rezultat, apoi continuăm împărțirea, în același mod, adăugând, pe rând, câte un zero la noul deîmpărțit, până când obținem câte zecimale dorim (nu neapărat pe toate).

Exemple:

1) 249 se divide la 3 și $249 : 3 = 83$;

2) $435 : 25 = 17,4$

$$\begin{array}{r} 435 \quad 25 \\ \underline{25} \\ 185 \\ \underline{175} \\ =100 \\ \underline{100} \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 43 = 25 \cdot 1 + 18 \\ 185 = 25 \cdot 7 + 10 \\ 100 = 25 \cdot 4 \end{array}$$

În momentul în care am terminat *de coborât* cifrele deîmpărțitului, se plasează *virgula* și se adaugă 0.

La fiecare etapă următoare, câțul reprezintă următoarea cifră a rezultatului, iar la rest se adaugă încă un zero și se continuă împărțirea.

În exemplul de mai sus, rezultatul este o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule. Vom afla, în lecțiile următoare, că rezultatul poate fi și fracție cu număr infinit de zecimale nenule.





Aplicație:

Media aritmetică a două sau mai multe numere naturale

Silviu are la geografie notele: 9, 8, 10, iar la limba engleză notele: 9, 9, 8, 10, 7 și dorește să-și calculeze media notelor la fiecare dintre cele două materii. Ajutați-l pe Silviu să calculeze.

Soluție. Calculăm suma notelor la geografie: $9 + 8 + 10 = 27$.

Pentru că sunt 3 note, media notelor obținute la geografie este $m_a = 27 : 3 = 9$.

Calculăm suma notelor la limba engleză: $9 + 9 + 8 + 10 + 7 = 43$.

Pentru că sunt 5 note, media notelor obținute la limba engleză este $m_a = 43 : 5 = 8,6$.



Media aritmetică a n numere naturale, $n \geq 2$, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ este rezultatul împărțirii sumei numerelor la numărul lor, adică

$$m_a = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) : n \text{ sau } m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Media aritmetică a numerelor naturale 17, 21, 67 este

$$m_a = \frac{17 + 21 + 67}{3} = \frac{105}{3} = 35.$$

Media aritmetică a numerelor naturale 29, 32, 65, 17 este

$$m_a = \frac{29 + 32 + 65 + 17}{4} = \frac{143}{4} = 35,75.$$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Efectuați următoarele împărțiri și scrieți rezultatul ca fracție zecimală:
 - $49 : 10$;
 - $537 : 10$;
 - $135 : 100$;
 - $1234 : 1000$;
 - $27 : 4$;
 - $94 : 5$;
 - $17 : 20$;
 - $3 : 50$.
- Calculați media aritmetică a numerelor:
 - 10 și 22;
 - 18 și 25;
 - 4, 13 și 25;
 - 54, 73, 81 și 95;
- Media aritmetică a două numere este 8,5.
 - Calculați suma numerelor;
 - Dacă unul dintre numere este 7, aflați celălalt număr.
- Asociați fiecărei litere care indică o împărțire, scrisă în coloana **A**, cifra corespunzătoare rezultatului acesteia, aflat în coloana **B**.

A	B
a. $13 : 2 =$	1. 6,1
b. $32 : 5 =$	2. 6,2
c. $122 : 20 =$	3. 6,3
d. $155 : 25 =$	4. 6,4
	5. 6,5



Minitest

Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- (30 p) a) Sonia cumpără 4 kg de cartofi pentru care plătește 15 lei. Prețul unui kg de cartofi este:
A. 3,75 lei; **B.** 3,5 lei; **C.** 3,25 lei; **D.** 4,25 lei.
- (30 p) b) Un întreg este împărțit în opt părți egale. Expimând ca fracție zecimală o parte, obținem:
A. 0,25; **B.** 0,125; **C.** 0,2; **D.** 0,1.
- (30 p) c) Dacă pentru 50 de metri de panglică se plătește suma de 249 de lei, atunci prețul unui metru de panglică este:
A. 4,9 lei; **B.** 3,5 lei; **C.** 4,98 lei; **D.** 5 lei.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate



Ne amintim

O fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule se scrie $a, b_1 b_2 \dots b_n$, unde a este un număr natural, partea întreagă a fracției, iar b_1, b_2, \dots, b_n sunt zecimalele fracției, adică b_1 este cifra zecimilor, b_2 este cifra sutimilor ...

Exemple. Frațiile zecimale de forma $a, b_1 b_2 b_3$, cuprinse între 12,991 și 13 sunt: 12,992; 12,993; 12,994; 12,995; 12,996; 12,997; 12,998; 12,999.

Considerăm, fracția ordinară ireductibilă $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ și ne propunem să o transformăm în fracție zecimală.

Din lecția anterioară știm că orice fracție ordinară care poate fi scrisă cu numitorul 10, 100, 1000, ..., prin amplificarea sau simplificarea, se poate scrie ca fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule. Singurii divizori ai numitorului fracției, în formă ireductibilă, sunt puteri ale lui 2 sau ale lui 5.

Exemple.

$$1) \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3,5;$$

$$2) \frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4;$$

$$3) \frac{7}{20} = \frac{7}{20} = \frac{35}{10^2} = 0,35;$$

$$4) \frac{7}{50} = \frac{7}{50} = \frac{14}{10^2} = 0,14.$$

Fracția zecimală, în care se transformă o fracție ordinară dată, se poate obține efectuând împărțirea numărătorului la numitor, având grijă să plasăm virgula corect, la rezultat.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Ne propunem acum să aflăm cum transformăm în fracții zecimale și fracții ordinare pentru care numitorii nu au ca divizori doar puteri

ale lui 2 sau 5, de exemplu fracția $\frac{238}{3}$.

Cora, Alexia și Horia cumpără cu 238 de lei, pe care îl achită împreună. Ei doresc să contribuie cu aceeași sumă și fac următorul raționament: Dacă toți trei trebuie să plătim 238 de lei, atunci fiecare dintre noi va contribui cu $238 : 3$ lei.

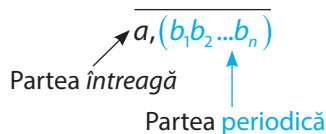
Efectuăm împărțirea, aplicând regula învățată în lecția anterioară.

Observăm că rezultatul împărțirii este o fracție zecimală cu un număr infinit de zecimale nenule. Cifra 3 se repetă de o infinitate de ori.

Fracția obținută se numește periodică, având perioada sau partea periodică egală cu cifra respectiv grupul de cifre care se repetă de o infinitate de ori.

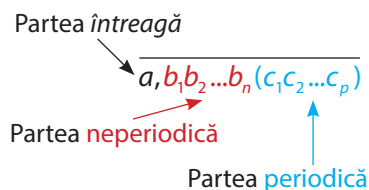
$$\begin{array}{r} 238 \overline{) 3} \\ \underline{21} \\ =28 \\ \underline{27} \\ =10 \\ \underline{9} \\ =10 \\ \underline{9} \\ =10 \\ \underline{9} \\ 1 \dots\dots \end{array} \quad \begin{array}{l} 21 = 7 \cdot 3 + 0 \\ 28 = 9 \cdot 3 + 1 \\ 10 = 3 \cdot 3 + 1 \\ 10 = 3 \cdot 3 + 1 \\ 10 = 3 \cdot 3 + 1 \end{array}$$

a) Dacă partea periodică începe imediat după virgulă, fracția se numește fracție periodică simplă.



$0,12121212 \dots$ este fracție periodică simplă, se notează $0,(12)$ și se citește: zero virgulă perioadă doisprezece.

b) Dacă între virgulă și partea periodică se află și alte cifre, fracția se numește fracție periodică mixtă.



$19,03512121212 \dots$ este fracție periodică mixtă, se notează $19,035(12)$ și se citește: nouăsprezece virgulă zero treizeci și cinci, perioadă doisprezece.

O fracție zecimală periodică este o fracție zecimală cu număr infinit de zecimale, cu proprietate că un grup finit de cifre se repetă, în aceeași ordine, de o infinitate de ori. Acest grup de cifre se numește partea periodică a fracției, sau perioada fracției zecimale.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Următoarele două exemple evidențiază obținerea fracțiilor zecimale periodice simple și a fracțiilor zecimale periodice mixte.

$$938:9 = 104,222... = 104,(2)$$

$$425:12 = 35,41666... = 35,41(6)$$

938 | 9

9 | 104,222...

=3 | 9 = 1 · 9 + 0

0 | 3 = 0 · 9 + 0

38 | 38 = 4 · 9 + 2

36 | 20 = 2 · 9 + 2

18 | 20 = 2 · 9 + 2

18 | 20 = 2 · 9 + 2

938 : 9 = 104,222... = 104,(2)

425 | 12

36 | 35,41666...

=65 | 42 = 3 · 12 + 6

60 | 65 = 5 · 12 + 5

48 | 50 = 4 · 12 + 2

20 | 20 = 1 · 12 + 8

12 | 80 = 6 · 12 + 8

72 | 80

425 : 12 = 35,4166666... = 35,41(6)

Observații.

a) Frația zecimală în care se transformă o fracție ordinară dată se poate obține efectuând împărțirea numărătorului la numitor, având grijă să plasăm virgula corect, la rezultat.

În cazul fracțiilor periodice, vom continua împărțirea până când *identificăm toate cifrele perioadei*.

b) O fracție periodică nu poate avea perioada (9).

c) Dacă numitorul unei fracții ordinare, în formă ireductibilă, nu se divide nici la 2 nici la 5, atunci aceasta se scrie sub formă de fracție zecimală *periodică simplă*.

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,3333... = 0,(3) \text{ – fracție periodică simplă;}$$

$$\frac{1}{7} = 1:7 = 0,142857... = 0,(142857) \text{ – fracție periodică simplă.}$$

Numitorii 3 respectiv 7 nu se divid nici la 2 nici la 5.

d) Dacă numitorul fracției, în formă ireductibilă, se divide *cel puțin la unul din numerele 2 sau 5 și la cel puțin un alt număr prim*, atunci aceasta se scrie sub formă de fracție zecimală *periodică mixtă*.

$$\frac{1}{6} = 1:6 = 0,1666... = 0,1(6) \text{ – fracție periodică mixtă;}$$

$$\frac{1}{15} = 1:15 = 0,06666... = 0,0(6) \text{ – fracție periodică mixtă.}$$

Numitorul 6 se divide la 2 și la 3, iar numitorul 15 se divide la 5 și la 3.

Aplicație:

Nouă elevi au participat la un test și au obținut următoarele note:

Elevul	Ana	Bianca	Cristian	Dan	Elena	Florin	Gelu	Horia	Cosmin
Nota	8	10	7	9	9	8	9	8	10

Efectuați calculele necesare și completați pe caiete răspunsurile corecte.

a) Media aritmetică a notelor obținute la test de cei nouă elevi este

Soluție. a) Suma notelor este 78. Numărul notelor este 9. Media va fi $m_a = \frac{78}{9} = 8,(6)$.

b) Media aritmetică a notelor obținute la test de primii trei elevi din tabel este

b) Primii trei elevi au media $m_a = \frac{25}{3} = 8,(3)$;

c) Media aritmetică a notelor obținute la test de ultimii șase elevi din tabel este

c) Ultimii șase elevi din tabel au media $m_a = \frac{53}{6} = 8,8(3)$.

d) Aflați ce notă ar fi trebuit să ia Cristian, pentru ca media grupului să fie 9.

d) Pentru ca media grupului să fie 9, ar fi trebuit ca suma notelor să fie $9 \cdot 9 = 81$, deci Cristian ar fi trebuit să aibă nota mai mare cu $81 - 78 = 3$ (puncte), adică nota 10.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți sub formă de fracții zecimale:

$$\frac{19}{2}; \frac{13}{10}; \frac{7086}{100}; \frac{83}{5}; \frac{25}{8}; \frac{19}{4}; \frac{285}{25}; \frac{1357}{500}.$$

2. Efectuați împărțirile și scrieți rezultatul ca fracție zecimală:

- a) 13 : 3; e) 43 : 6;
 b) 11 : 7; f) 151 : 12;
 c) 203 : 9; g) 17 : 30;
 d) 705 : 11; h) 104 : 15.

3. Scrieți sub formă de fracții zecimale:

$$\frac{25}{9}; \frac{43}{15}; \frac{77}{18}; \frac{203}{27}; \frac{96}{42}; \frac{112}{75}; \frac{700}{300}.$$

4. Asociați fiecărei *litere* care indică o fracție ordinară, scrisă în coloana **A**, *cifra* corespunzătoare scrierii acesteia în formă zecimală, aflată în coloana **B**.

A	B
a. $\frac{10}{3} =$	1. 2,(1)
b. $\frac{31}{9} =$	2. 3,(3)
c. $\frac{14}{6} =$	3. 2,(12)
d. $\frac{70}{33} =$	4. 2,(3)
	5. 3,(4)

5. Transformați fracțiile ordinare în fracții zecimale și precizați, pentru fiecare, numărul cifrelor perioadei.

- a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{35}{6}$;

c) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{1}{30}$;

d) $\frac{4}{11}$; f) $\frac{40}{27}$.

6. Alegeți câte o valoare pentru numărul natural n astfel încât:



a) fracția $\frac{11}{n}$ să se transforme în fracție zecimală finită;

b) fracția $\frac{10}{n+1}$ să se transforme în fracție zecimală periodică simplă;

c) fracția $\frac{7}{n+2}$ să se transforme în fracție zecimală periodică mixtă.

7. Fie fracția $a = 0,(123)$.

a) Determinați a opta zecimală a fracției a .

b) Calculați suma primelor zece zecimale ale fracției a .

8. Scrieți în ordine crescătoare fracțiile zecimale: 3,(2); 3,(23); 3,(32); 3,2(3); 3,3(2); 3,23.

Model. Comparăm 3,(23) cu 3,2(3).

Din 3,(23) = 3,232323... și 3,2(3) = 3,2333..., identificăm prima pereche de cifre diferite și stabilim că $2 < 3$, deci 3,232323... < 3,2333..., deci 3,(23) < 3,2(3).

9. Calculați media aritmetică a numerelor:

- a) 8 și 28; b) 13; 24 și 38;
 c) 34 și 26; d) 12; 56 și 121;
 e) 34; 74 și 18; f) 235; 474; 609 și 1032.



Minitest

1. Transformați în fracții zecimale:

(3x20 p) a) $\frac{17}{20}$; b) $\frac{25}{9}$; c) $\frac{31}{6}$.

2. Media aritmetică a numerelor x și y este 4,2, iar media aritmetică a numerelor x , y și z este 5,4.

(15 p) a) Aflați suma numerelor x și y .

(15 p) b) Aflați numărul z .

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L5 Împărțirea a două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule



Ne amintim

Numeralele naturale se scriu ca fracții zecimale sub forma $\overline{a_1 a_2 \dots a_p}, 000\dots$ cu toate zecimalele egale cu 0.

Orice fracție ordinară se poate transforma într-o fracție zecimală *cu număr finit de zecimale nenule* sau într-o *fracție zecimală periodică* (simplă sau mixtă).

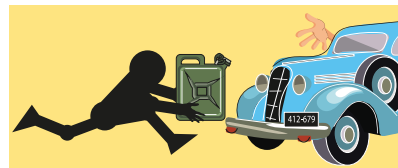
Rezultatul înmulțirii unei fracții zecimale cu o putere a lui 10, este fracția zecimală obținută *mutând virgula spre dreapta* peste atâtea cifre câte ne indică exponentul lui 10.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

a) Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la puteri ale lui 10

Știind că pentru a parcurge 100 de km, un autovehicul a consumat 5,2 ℓ de combustibil, calculați câți litri de combustibil de același fel va consuma pentru 10 km, apoi pentru 1 km.



Rezolvare. Pentru 10 km, va consuma de 10 ori mai puțin decât pentru 100 km, adică rezultatul împărțirii 5,2 : 10.

$$\text{Știm de la fracții ordinare că } 5,2 : 10 = \frac{52}{10} : \frac{10}{1} = \frac{52}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{52}{100} = 0,52 \text{ (ℓ)}.$$

Pentru 1 km, va consuma de 100 ori mai puțin decât pentru 100 km, adică rezultatul împărțirii 5,2 : 100. Știm de la fracții ordinare că $5,2 : 100 = \frac{52}{10} : \frac{100}{1} = \frac{52}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{52}{1000} = 0,052 \text{ (ℓ)}.$

Observăm că a împărți o fracție la o putere a lui 10, de exemplu 10^n , înseamnă a înmulți acea fracție cu $0, \underbrace{00\dots}_n 1$. Rezultatul împărțirii are exact cifrele fracției inițiale, dar are cu n zecimale mai multe decât aceasta.

Regulă practică: Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la puteri ale lui 10

A împărți o fracție zecimală cu număr finit de zecimale la o putere a lui 10, revine la *a muta virgula, spre stânga, peste un număr de cifre egal cu exponentul lui 10.*

Dacă numărul zecimalelor fracției inițiale este mai mic decât exponentul lui 10, atunci se completează zerouri.

Exemple.

1) $12,2 : 10 = 1,22;$

2) $12,2 : 100 = 0,122;$

3) $9,5 : 100 = 0,095;$

4) $37,909 : 10^3 = 0,037909.$

b) Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

Pentru a împărți o *fracție zecimală la un număr natural nenul* procedăm ca la împărțirea a două numere naturale, cu precizarea că *virgula se plasează la rezultat* în momentul în care *urmează să folosim* (să coborâm) *cifra zecimilor.*



Exemple.

19,5 : 8 = 2,4375	527, 127 : 5 = 105,4254	12,37 : 6 = 2,061(6)
$\begin{array}{r} 19,5 \overline{) 8} \\ \underline{16} \\ 35 \\ \underline{32} \\ 30 \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ == \end{array}$ $19 = 2 \cdot 8 + 3$ $35 = 4 \cdot 8 + 3$ $30 = 3 \cdot 8 + 6$ $60 = 7 \cdot 8 + 4$ $40 = 5 \cdot 8 + 0$	$\begin{array}{r} 527,127 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 0 \\ \underline{27} \\ 25 \\ \underline{21} \\ 20 \\ \underline{12} \\ 10 \\ \underline{27} \\ 25 \\ \underline{20} \\ 20 \\ == \end{array}$ $5 = 5 \cdot 1 + 0$ $2 = 5 \cdot 0 + 2$ $27 = 5 \cdot 5 + 2$ $21 = 4 \cdot 5 + 1$ $12 = 2 \cdot 5 + 2$ $27 = 5 \cdot 5 + 2$ $20 = 4 \cdot 5 + 0$	$\begin{array}{r} 12,37 \overline{) 6} \\ \underline{12} \\ 37 \\ \underline{36} \\ 10 \\ \underline{6} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \dots \end{array}$ $12 = 2 \cdot 6 + 0$ $3 = 0 \cdot 6 + 3$ $37 = 6 \cdot 6 + 1$ $10 = 1 \cdot 6 + 4$ $40 = 6 \cdot 6 + 4$ $40 = 6 \cdot 6 + 4$ $36 \dots$

c) Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Ne propunem să formulăm o *regulă practică* privind împărțirea a două fracții cu număr finit de zecimale nenule, pe baza rezultatelor obținute anterior.

Sebastian și Mihai efectuează două împărțiri diferite și obțin același rezultat. Cum se justifică acest fapt?

Sebastian: $26,05 : 0,25 = \frac{2605}{100} : \frac{25}{100} = \frac{2605}{100} \cdot \frac{100^1}{25} = \frac{2605}{25} = 104,2$

Mihai: $2605 : 25 = 104,2$

Observăm că $2605 = 26,05 \cdot 100$, iar $25 = 0,25 \cdot 100$.

Justificare. Dacă înmulțim și deîmpărțitul și împărțitorul cu un număr nenul, atunci rezultatul împărțirii rămâne neschimbat.

Regulă practică: Împărțirea a două fracții zecimale cu număr finit de zecimale nenule

Etapă	Exemple	
<ul style="list-style-type: none"> Înmulțim ambele fracții cu 10^n, unde n este numărul zecimalelor semnificative ale împărțitorului. 	$12,47 : 62,5 = 124,7 : 625$	62,5 are o singură zecimală semnificativă, deci înmulțim cu $10^1 = 10$.
	$123,123 : 1,23 = 12312,3 : 123$	1,23 are două zecimale semnificative, deci înmulțim cu $10^2 = 100$.
	$3,033 : 0,324 = 3033 : 324$	0,324 are trei zecimale semnificative, deci înmulțim cu $10^3 = 1000$.

- Împărțim fracția obținută prin înmulțirea deîmpărțitului la numărul natural obținut prin înmulțirea împărțitorului.

Calculăm $124,7 : 625 = 0,19952$; $12312,3 : 123 = 100,1$ și $3033 : 324 = 9,36(1)$.

Rezultatul acestei împărțiri reprezintă și rezultatul împărțirii cerute.

Concluzie. $12,47 : 62,5 = 0,19952$; $123,123 : 1,23 = 100,1$ și $3,033 : 0,324 = 9,36(1)$.

Alte exemple: $19,5 : 0,08 = 1950 : 8 = 243,75$, iar $27,127 : 0,5 = 271,27 : 5 = 54,254$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Copiați tabelul pe caiete, efectuați împărțirile și completați rezultatele în casetele corespunzătoare:

a	b	$a : b$	a	b	$a : b$
4,8	2		12,3	10	
16,2	3		427,8	100	
30,24	12		53,7	1000	
112,5	15		20,22	10^2	

2. Copiați enunțurile pe caiete, efectuați calculele necesare, apoi completați răspunsul corect în spațiile punctate.

- a) Rezultatul împărțirii fracției 88,8 la 12 este ...
 b) 296,4 kg de fructe se pun în 24 lădițe, în cantități egale. Fructele dintr-o lădiță cântăresc ... kg.
 c) Suma de 1454,4 euro este rambursată în 36 de rate egale. La o singură rată se plătește suma de ... euro.
 d) Suma a două fracții este 96,28, iar una dintre ele este de nouă ori mai mare decât cealaltă. Frația mai mică este ...
 e) Printr-un robinet cu debit constant curg, în 15 ore, 1477,5 litri de apă. Cantitatea de apă care curge prin robinet într-o oră (debitul) este de ... litri.
3. Efectuați împărțirile:
 a) $104,6 : 2$; e) $77,2 : 10$;
 b) $290,7 : 3$; f) $955,8 : 100$;
 c) $0,8 : 5$; g) $0,3 : 1000$;
 d) $15,5 : 20$; h) $304,5 : 10^5$.
4. Aflați fracția:
 a) de 35 de ori mai mică decât 1207,5.
 b) de 73 de ori mai mică decât $2 \cdot 204,4$.

5. Zece stilouri de același fel costă 342,5 lei. Aflați cât costă șapte stilouri.

6. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Rezultatul împărțirii $13,6 : 0,8$ este:

A. 1,6; B. 17; C. 16; D. 1,6.

b) Dacă $5,4 \cdot x = 66,42$, atunci x este:

A. 12; B. 12,4; C. 12,3; D. 13,3.

c) Dacă $20,22 : y = 33,7$, atunci y este:

A. 0,4; B. 4; C. 6; D. 0,6.

7. Efectuați împărțirile:

a) $51,6 : 0,2$;

e) $26,46 : 2,7$;

b) $20,37 : 0,3$;

f) $1,225 : 0,35$;

c) $62,5 : 0,5$;

g) $1,113 : 0,42$;

d) $3,15 : 3,5$;

h) $10,812 : 0,53$.

8. a) Dacă $a \cdot b + a \cdot c = 8,84$ și $b + c = 2,6$, aflați numărul a .

b) Dacă $a \cdot b - b \cdot c = 145,8$ și $a - c = 3,24$, aflați numărul b .

c) Dacă $2 \cdot a \cdot b = 16,2$ și $3 \cdot a \cdot b \cdot c = 51,03$, aflați numerele $a \cdot b$ și c .

9. Precizați de câte lădițe este nevoie pentru a transporta 5482,5 kg fructe, dacă în fiecare lădiță se pun 42,5 kg fructe.

10. Analizați operațiile următoare și puneți virgula la fiecare rezultat așa încât să obțineți egalități.

a) $18,5 : 2,5 = 74$;

b) $332,58 : 4,6 = 723$;

c) $1234,567 : 0,01 = 1234567$.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(15p) a) Rezultatul împărțirii $32,025 : 7,5$ este:

A. 7,24;

B. 4,27;

C. 42,7;

D. 2,47.

(15p) b) Zece recipiente de același fel, se umplu cu apă, în total 222,5 litri. Capacitatea unui recipient este:

A. 2,225 litri;

B. 22 litri;

C. 2225 litri;

D. 22,25 litri.

(3 × 15p) 2. Efectuați împărțirile: a) $0,8 : 0,008$; b) $5,76 : 3,6$; c) $0,117 : 0,75$.

(15p) 3. Deplasându-se cu taxiul, Maria plătește 38,4 lei. Aflați distanța parcursă de Maria cu taxiul, știind că a plătit 3,2 lei pentru fiecare km.



Dicționar

capacitate = volumul ocupat de lichide. $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L6 Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară



Ne amintim

Știm din lecțiile anterioare că orice fracție ordinară $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale,

$b \neq 0$, se poate scrie în mod unic în una dintre formele:

- fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule;
- fracție zecimală periodică simplă, cu perioada diferită de (9);
- fracție zecimală periodică mixtă, cu perioada diferită de (9).

$$\frac{19}{5} = 3,8$$

$$\frac{19}{13} = 1,(\overline{461538})$$

$$\frac{19}{6} = 3,1(\overline{6})$$



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

De multe ori, efectuarea calculelor cu fracții zecimale periodice este greu sau chiar imposibil de efectuat. Atunci, este avantajos să exprimăm fracțiile sub formă de fracții ordinare.

Regula	Exemple
$\overline{a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m} = \frac{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}{10^m}$ <p>Pentru a transforma o fracție zecimală cu număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară, scriem la numărător numărul natural obținut din fracția zecimală eliminând virgula, apoi scriem la numitor 10^m, unde m este numărul zecimalelor fracției.</p>	$3,8 = \frac{38}{10^1} = \frac{38}{10}; 12,47 = \frac{1247}{10^2} = \frac{1247}{100};$ $0,345 = \frac{345}{10^3} = \frac{345}{1000}.$
$\overline{a_1 \dots a_n, (p_1 \dots p_k)} = \frac{a_1 \dots a_n p_1 \dots p_k - a_1 \dots a_n}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ cifre}}}$ <p>Pentru a transforma o fracție zecimală periodică simplă în fracție ordinară, scriem la numărător diferența dintre numărul natural obținut din fracția zecimală eliminând virgula și numărul natural care reprezintă partea întreagă a fracției zecimale, apoi scriem la numitor numărul format cu k cifre egale cu 9, unde k este numărul zecimalelor aflate în perioadă.</p>	$1,(41) = \frac{141-1}{99} = \frac{140}{99};$ $0,(932) = \frac{932}{999};$ $34,(6) = \frac{346-34}{9} = \frac{313}{9}.$
$\overline{a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m (p_1 \dots p_k)} = \frac{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m p_1 \dots p_k - a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ cifre}} \underbrace{00 \dots 0}_{m \text{ cifre}}}$ <p>Pentru a transforma o fracție zecimală periodică mixtă în fracție ordinară, scriem la numărător diferența dintre numărul natural obținut din fracția zecimală eliminând virgula și numărul natural format cu toate cifrele care nu se află în perioadă, apoi scriem la numitor numărul format cu k cifre egale cu 9, urmate de m cifre egale cu 0, unde k este numărul zecimalelor din perioadă, iar m este numărul zecimalelor care nu sunt în perioadă.</p>	$3,10(6) = \frac{3106-310}{900} = \frac{2796}{900}$ $0,328(32) = \frac{32832-328}{99000}, \text{ deci}$ $0,328(32) = \frac{32504}{99000}.$



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Efectuați calculul:

$$13,6 + 10, (1) - 2 \cdot 2,6(7).$$

Exprimați rezultatul sub formă de fracție zecimală.

$$13,6 = \frac{136}{10}; 10, (1) = \frac{101-10}{9} = \frac{91}{9}; 2,6(7) = \frac{267-26}{90} = \frac{241}{90}.$$

$$\text{Atunci, } 13,6 + 10, (1) - 2 \cdot 2,6(7) = \frac{136}{10} + \frac{91}{9} - \frac{2 \cdot 241}{90} =$$

$$= \frac{9 \cdot 136 + 10 \cdot 91 - 2 \cdot 241}{90} = \frac{1224 + 910 - 482}{90} = \frac{1652}{90} = 18,3(5)$$

2. Fără a efectua împărțirea, determinați cifrele a și b , știind că

$$\overline{a,(b)} = \frac{17}{9}.$$

Din $\overline{a,(b)} = \frac{17}{9}$ și $\overline{a,(b)} = \frac{ab-a}{9}$, rezultă că $\overline{ab} - a = 17$, adică $9a + b = 17$.

Cum a și b sunt cifre, rezultă $a = 1$ și $b = 8$.

3. Determinați cifra a știind că $A = 0,1(a) + 0,a(1)$ este un număr natural.

$$A = \frac{\overline{1a}-1}{90} + \frac{\overline{a1}-a}{90} = \frac{\overline{1a}-1+\overline{a1}-a}{90} = \frac{10a+10}{90} = \frac{10(a+1)}{90} = \frac{a+1}{9}.$$

A este număr natural și a este cifră, deci $a = 8$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Transformați în fracții ordinare:

- a) 0,(4); b) 0,(6); c) 3,(7);
 d) 14,(5); e) 0,(23); f) 0,(45);
 g) 1,(37); h) 5,(06); i) 0,(143);
 j) 0,(234); k) 1,(429); l) 2,(567).

c) Dacă $\frac{23}{12} = \overline{a,bc(d)}$, atunci $a + b + c + d$ este:

- A. 12; B. 15; C. 17; D. 14.

2. Transformați în fracții ordinare ireductibile:

- a) 0,0(4); b) 1,1(4);
 c) 2,5(37); d) 3,45(6);

3. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Frația 3,(6) se transformă în fracția ordinară:

- A. $\frac{11}{3}$; B. $\frac{36}{10}$; C. $\frac{33}{10}$; D. $\frac{36}{99}$.

b) Transformând 3,2(6) în fracție ordinară, obținem:

- A. $\frac{98}{33}$; B. $\frac{326}{90}$; C. $\frac{326}{100}$; D. $\frac{49}{15}$.

4. Copiați pe caiete, apoi completați răspunsul corect.

a) Scrisă ca fracție ordinară, fracția zecimală 10,01 devine: ...

b) Scrisă ca fracție ordinară, fracția zecimală 10,(1) devine: ...

c) Scrisă ca fracție ordinară, fracția zecimală 1,0(2) devine: ...

5. Fără a efectua împărțirea, determinați cifrele a și b , știind că $\overline{a,(b)} = \frac{43}{9}$.

6. Determinați cifra a , știind că $A = \overline{0,3(a)} + \overline{0,a(3)}$ este un număr natural.



Minitest

(30p) 1. Stabiliți valoarea de adevăr al propozițiilor. $p_1: 5,(3) = \frac{53}{9}$; $p_2: 4,0(3) = \frac{121}{30}$.

(30p) 2. a) Dacă $\overline{0,(x)} = \frac{7}{9}$, aflați cifra x . b) Dacă $\overline{3,2(y)} = \frac{59}{18}$, aflați cifra y ;

(30p) 3. Transformați fracțiile zecimale 0,(4) și 0,7(6) în fracții ordinare, efectuați înmulțirile și comparați produsele $a = 50 \cdot 0,(4)$ și $b = 30 \cdot 0,7(6)$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L7 Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

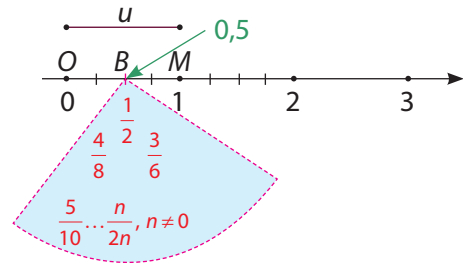


Număr rațional pozitiv

Observați, în imaginea alăturată, reprezentările pe axa numerelor, a unui grup de fracții ordinare și a fracției zecimale 0,5.

Fracțiile ordinare, reprezentate pe axa numerelor în punctul B, sunt echivalente:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots = \frac{n}{2 \cdot n} = \dots, \text{ toate având reprezentarea zecimală } 0,5.$$



Concluzie. Punctul B, mijlocul segmentului unitate OM, din imaginea de mai sus, este reprezentarea unică a numărului rațional care se exprimă prin oricare fracție ordinară de forma $\frac{n}{2n}$, $n \neq 0$ sau prin fracția zecimală 0,5.



Reținem

Considerăm fracția ordinară $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale nenule.

Toate fracțiile ordinare echivalente cu $\frac{a}{b}$ formează numărul rațional pozitiv $\frac{a}{b}$.
Numerele naturale nenule sunt numere raționale pozitive.

Fracțiile $\frac{0}{b}$, $b \neq 0$, formează numărul rațional 0.

Observație. Fiecare dintre fracțiile echivalente care formează un număr rațional este un reprezentant al numărului rațional.



Reținem

Orice număr rațional pozitiv poate fi scris în mod unic sub forma unei fracții ordinare ireductibile $\frac{a}{b}$, cu a și b numere naturale, $a \neq 0$ și $b \neq 0$.

Un număr rațional poate fi numit prin oricare dintre reprezentanții săi.

Observație. Pentru reprezentarea pe axă este avantajoasă, de multe ori, scrierea numărului sub formă de fracție ordinară ireductibilă.

Fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \dots, \frac{100}{200}, \dots$ sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional pozitiv. Numărul rațional pozitiv de mai sus se scrie în mod unic sub formă de fracție ireductibilă $\frac{1}{2}$.

Reprezentarea pe axa numerelor a unui număr rațional pozitiv este unică.

Numărul rațional 0 se reprezintă pe axa numerelor în originea acesteia.



Reținem

Două numere rationale sunt egale dacă și numai dacă fracțiile ordinare prin care se reprezintă sunt fracții echivalente.

Scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și citim a supra b este egal cu c supra d .

Scrierea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se folosește atât pentru echivalența celor două fracții ordinare cât și pentru egalitatea numerelor rationale pozitive ai căror reprezentanți sunt aceste fracții.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Știm din lecțiile anterioare că orice fracție ordinară se poate exprima, în mod unic, sub formă de fracție zecimală (finită sau periodică). Știm, de asemenea, că două sau mai multe fracții echivalente se exprimă prin *aceeași fracție zecimală*.

Atunci, despre numerele raționale pozitive, deducem:

Orice număr rațional pozitiv se poate scrie în *mod unic* sub formă de *fracție zecimală*:

- fracție cu *număr finit de zecimale nenule*.
- fracție zecimală cu număr infinit de zecimale nenule, *periodică simplă*, cu perioada diferită de (9).
- fracție zecimală cu număr infinit de zecimale nenule, *periodică mixtă*, cu perioada diferită de (9).

$$\frac{2}{5} = 0,4 \text{ – fracție zecimală finită;}$$

$$\frac{7}{3} = 2,(3) \text{ – fracție periodică simplă;}$$

$$\frac{13}{35} = 0,3(714285) \text{ – fracție periodică mixtă.}$$

Reprezentarea pe axă a unui număr rațional pozitiv se identifică cu reprezentarea pe axă a *oricărui reprezentant* al său.

Operații cu numere raționale pozitive. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

Operațiile cu fracții ordinare și operațiile cu fracții zecimale sunt *operații cu numere raționale*, exprimate sub formă de fracții ordinare, respectiv sub formă de fracții zecimale.

Prin urmare, *adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la puteri cu exponent natural*, a numerelor raționale pozitive se pot efectua:

- folosind scrierea numerelor sub formă de *fracții ordinare*;
- folosind scrierea numerelor sub formă de *fracții zecimale*.

Au loc proprietățile:

Adunarea și înmulțirea numerelor raționale sunt *asociative* și *comutative*.

Numărul rațional 0 este *element neutru pentru adunare*, iar numărul rațional 1 este *element neutru pentru înmulțire*.

Înmulțirea numerelor raționale este *distributivă față de adunare și față de scădere*.

Orice număr rațional pozitiv x admite un *invers* egal cu numărul rațional pozitiv $1 : x$ sau $\frac{1}{x}$.

Numărul rațional 0 nu admite invers.



Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive este *aceeași ca la operațiile cu numere naturale*.

- Dacă exercițiul conține *doar operații de același ordin*, acestea se efectuează în ordinea în care apar, de la stânga la dreapta.
- Dacă exercițiul are operații de *ordine diferite*, dar *nu conține paranteze*, atunci se efectuează operațiile de ordin trei, apoi de ordin doi și la final de ordinul întâi, în ordinea în care apar.

Observație: Operațiile cu puteri se pot efectua în etapa pregătitoare sau *pe parcursul rezolvării*, atunci când dorim să scriem unele numere într-o formă care să simplifice calculele.

- Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:
 - Se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă anterior.
 - Se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.
 - Se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă.

Se continuă, în acest mod, până când se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.



Reținem

- Toate numerele naturale nenule sunt numere raționale pozitive.
- Dacă, într-un exercițiu, unele numere raționale sunt reprezentate prin fracții ordinare și altele sunt reprezentate prin fracții zecimale, *alegem același mod de reprezentare*, înainte de a începe calculul.
- Dacă, într-un calcul, unele numere se scriu sub formă de *fracții periodice*, atunci acestea *se transformă în fracții ordinare* pentru a efectua calculele. În caz contrar, în calcule se vor folosi aproximări, ceea ce, după mai multe calcule, ar conduce doar la o *estimare a rezultatului* și nu la rezultatul exact.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Scrieți:

- trei numere raționale;
- trei numere raționale care nu sunt numere naturale;
- două numere raționale care să fie și numere naturale.

2. Completați în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Orice număr natural este număr rațional.	
p_2 : Orice număr rațional este număr natural.	
p_3 : Există numere raționale care nu sunt numere naturale.	
p_4 : Un reprezentant al numărului rațional $\frac{35}{45}$ este fracția $\frac{7}{9}$.	
p_5 : Pentru $n = 2$, numărul $\frac{4}{n+2}$ este natural.	

3. Scrieți trei fracții care să reprezinte numărul rațional $\frac{5}{2}$.

4. Arătați că fracțiile $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{32}$ și $\frac{3 \cdot n + 3}{8 + 8 \cdot n}$ reprezintă același număr rațional, oricare ar fi numărul natural n .

5. a) Calculați numărul rațional cu 7,5 mai mare decât 7,05 : 1,5.

b) Calculați diferența dintre numărul 91,25 și pătratul numărului 9,5.

c) Calculați $9,4^2 - (58,75 : 4,7 + 7^2)$.

6. Calculați:

a) $[0,25) - 0,25] : 0,02$;

b) $[0,32) - 0,32] \cdot 618,75$;

c) $[0,16 + 0,16] : 0,28 : 0,02 - \frac{6}{7}$;

d) $[0,375) - 0,375] : \frac{5}{37} : \frac{7}{360}$.

7. Efectuați calculele:

a) $1,4 \cdot 1,6 + 2,76$;

e) $(8,5^0 + 9,2 : 2,3) : 1,6$;

b) $2,(3) + \frac{5}{2} : 2$;

f) $(7,1 - 1,75 : \frac{1}{2}) \cdot 0,7$;

c) $10 \cdot 9,185 - 8037 : 10^2$. g) $\left[0,(225) + \frac{4}{37}\right] \cdot \frac{9}{10}$;

d) $[0,(24) - 0,24] \cdot 33$; h) $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) \cdot 6 + 8 : 2,5$;

i) $\left[1 : (0,09 + 0,4^2) - 1\frac{3}{4}\right] : 0,(7)$.

8. Determinați numărul natural n pentru care $a < n < b$, unde:

$$a = \left(3,2 + 1,1(6) - \frac{29}{12}\right) : \left(5,(3) - \frac{5}{7} + \frac{13}{42}\right) \cdot \frac{23}{13};$$

$$b = \left(2\frac{1}{2} - 1,5\right) : \left(1,(6) - 1\frac{5}{8}\right) \cdot 4,25.$$

9. Determinați numerele a și b .

$$a = \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{8}\right) : 1,8(3) + 0,8(3)\right] : 1,58(3);$$

$$b = \left[\left(1,5 + \frac{8}{5} - \frac{7}{4}\right) : 1,35 + \left(\frac{2}{5}\right)^2\right] : 3,48.$$

10. Comparați numerele

$$a = 2,4^2 - 0,5^3 \cdot 43,6 \text{ și } b = \left(\frac{7}{2} - 0,1(6)\right) : 10.$$

11. Calculați suma și produsul numerelor a și b , unde

$$a = \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right) : 1,(6) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \cdot 1,44;$$

$$b = \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - 0,35\right) : 0,25 + 0,(6)\right] : 1,5(3).$$

12. Scrieți rezultatul calculului sub formă de fracție zecimală, apoi precizați partea întreagă a numărului $A = [0,4 + 4,(4)] \cdot (15,4 - 0,4^3 : 0,16)$.



13. Se consideră numerele:

$$a = 1,(05) - 0,(50),$$

$$b = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 : 0,(3)^3\right] : 0,0(5);$$

$$c = \frac{15}{1,1 + 2,2 + \dots + 8,8 + 9,9}.$$

Efectuați calculele necesare, folosind proprietățile operațiilor și stabiliți dacă printre cele trei numere sunt și numere naturale.

14. Calculați media aritmetică a numerelor raționale

$$\text{pozitive: } \frac{4}{5}; 0,9 \text{ și } 2,17.$$

15. Media aritmetică a două numere raționale pozitive este 4,12. Dacă unul dintre numere este $4\frac{21}{25}$, aflați celălalt număr.

16. Completați în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Rezultatul calculului $\frac{3}{7} \cdot \frac{21}{45}$ este $\frac{1}{5}$.	
p_2 : Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) : 0,(1)$ este 9.	
p_3 : Rezultatul calculului $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 : [0,(6)]^{11}$ este $\frac{8}{27}$	
p_4 : $\frac{12}{13}$ din 32,5 este 30.	

17. Dintr-un depozit urmează să se aprovizioneze cu fructe două magazine. Unul dintre ele primește 0,3 din cantitate, iar celălalt primește o șesime din cantitatea inițială. Știind că, în total, cele două magazine vor primi 70 tone de fructe, aflați ce cantitate de fructe este în depozit și ce cantitate primește fiecare magazin.



Minitest

Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(15p) 1. Numărul rațional cu 3,4 mai mare decât $5,16 : 0,4$ este:

A. 13,6; B. 16,2; C. 16,3; D. 12,6.

(15p) 2. Diferența dintre numărul 67,25 și pătratul numărului 7,5 este:

A. 10; B. 11; C. 10,5; D. 11,5.

(15p) 3. Produsul numerelor raționale $5,6 - 4,9$ și $5,6 + 4,9$ este:

A. 7,35; B. 7,45; C. 7,55; D. 7,25.

(15p) 4. Rezultatul împărțirii numărului 125 la $2,5 \cdot 5$ este:

A. 13; B. 12; C. 11; D. 10.

(15p) 5. Produsul $2,(7) \cdot 1\frac{4}{5}$ este mai mare decât 3,2 cu:

A. 1,4; B. 1,8; C. 1,6; D. 1,5.

(15p) 6. Rezultatul calculului $3,6^2 - 30 : 2,4$ este:

A. 0,4; B. 0,45; C. 0,46; D. 0,5.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

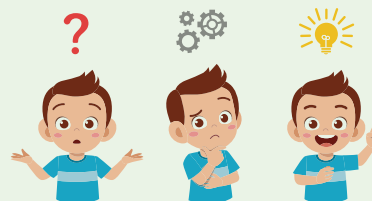
L8 Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură



Ne amintim

În general, pentru a rezolva o problemă de aritmetică, parcurgem etapele:

- Se identifică ipoteza (datele pe care le considerăm cunoscute) și concluzia problemei (ce avem de calculat, de demonstrat sau de justificat).
- Se stabilesc dependențele între mărimile care apar în problemă.
- Se alege metoda de rezolvare.
- Se scriu schematic datele problemei, se realizează reprezentări, astfel încât să fie evidențiate dependențele necesare aplicării metodei alese.
- Se efectuează calculele necesare și se scrie soluția.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Metodele aritmetice pe care le-am studiat la rezolvarea problemelor în care datele sunt exprimate prin numere naturale sunt valabile și pentru rezolvarea problemelor în care datele sunt exprimate prin numere raționale pozitive.

Noutatea constă în completarea acestor metode cu *tehnicele de calcul cu numere raționale pozitive*: operații cu fracții ordinare sau operații cu fracții zecimale. Noile date ne permit trecerea de la o unitate de măsură la un multiplu sau la un submultiplu al acesteia, folosind operații cu numere raționale exprimate prin fracții ordinare sau prin fracții zecimale.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Probleme rezolvate.

1. Rezolvați problema folosind metoda reducerii la unitate

Aflați cât costă 2,5 kg miere, știind că 125 g de miere costă 3,20 lei.

Exprimăm cele două cantități în aceeași unitate de măsură. $125 \text{ g} = 125 : 1000 \text{ kg} = 0,125 \text{ kg}$.

Stabilim că dacă va crește cantitatea de miere cumpărată, de un număr de ori, atunci crește și costul acesteia, de același număr de ori.

Datele problemei: 0,125 kg 3,20 lei
2,5 kg x lei



Rezolvare:

Etapa I: 0,125 kg 3,20 lei,
1 kg 3,20 lei : 0,125 = 25,60 lei.

Etapa a II-a: 1 kg 25,60 lei,
2,5 kg 25,60 lei · 2,5 = 64 lei.

2. Rezolvați problema folosind metoda comparației.

Trei caiete și cinci creioane costă 20,25 lei, iar nouă caiete și cinci creioane costă 53,25 lei. Aflați cât costă un caiet și cât costă un creion.

Rezolvare:

3 caiete5 creioane 20,25 lei

9 caiete5 creioane 53,25 lei

Diferența de bani 53,25 lei – 20,25 lei = 33 lei, provine de la diferența numărului de caiete: $9 - 3 = 6$.

Deducem că 6 caiete costă 33 lei, deci un caiet costă $33 : 6 = 5,50$ lei.

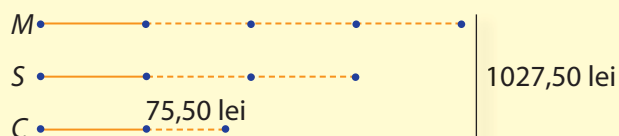
Din enunț: 3 caiete și 5 creioane costă 20,25 lei, deci 5 creioane costă $20,25 \text{ lei} - 3 \times 5,50 \text{ lei} = 20,25 \text{ lei} - 16,50 \text{ lei} = 3,75 \text{ lei}$ și atunci un creion costă $3,75 \text{ lei} : 5 = 0,75 \text{ lei}$.

3. Rezolvați problema folosind metoda figurativă.

Mihai, Sebastian și Cristian aveau împreună 1027,5 lei. După ce au cheltuit, Mihai trei pătrimi din suma sa, Sebastian două treimi din suma sa, iar Cristian 75,50 lei, au rămas cu sume de bani egale. Aflați ce sumă de bani a avut fiecare la început.

Rezolvare:

Reprezentăm printr-un segment (unitate) suma cu care rămâne fiecare. Atunci, suma lui Mihai se reprezintă prin 4 segmente egale, iar suma lui Sebastian se reprezintă prin trei astfel de segmente. Suma lui Cristian este reprezentată printr-un segment unitate și încă un segment, corespunzător sumei de 75,50 lei.



Diferența $1027,5 - 75,5 = 952$ (lei) corespunde celor 8 segmente de aceeași lungime, deci fiecare va corespunde sumei de $952 : 8 = 119$ (lei). Mihai a avut $4 \cdot 119 = 476$ (lei), Sebastian a avut $3 \cdot 119 = 357$ (lei), iar Cristian a avut $119 + 75,50 = 194,50$ (lei).

4. Rezolvați problema folosind metoda mersului invers.

Maria și Daniel au parcurs distanța de 7,2 km dintre două obiective turistice astfel:

Au mers o distanță pe jos, până în stația de autobuz. Apoi, au observat drumul pe care mergea autobuzul și au notat. Acesta a mers înainte 250 m, a luat-o la **stânga** și a mers 2,35 km, a luat-o la **dreapta** și a mers o distanță de 500 m, iar apoi din nou la **stânga** și s-a oprit după încă 3,5 km.

Calculați distanța pe care copiii au parcurs-o pe jos, urmând drumul pe care l-au făcut, în sens invers.



Rezolvare:

Parcurgem drumul în sens invers: mergem înainte 3,5 km, o luăm la **dreapta** și adăugăm 500 m, apoi la **stânga** și adăugăm 2,35 km, iar acum facem curbă la dreapta și mai mergem 250 m. Am ajuns în stația de autobuz. Distanța parcursă este: $3,5 \text{ km} + 500 \text{ m} + 2,35 \text{ km} + 250 \text{ m} = 6,6 \text{ km}$.

Diferența de $7,2 - 6,6 = 0,6$ (km) = 600 (m) a fost parcursă pe jos.

5. Rezolvați problema folosind metoda mersului invers.

Teodora a avut o sumă de bani și a făcut cumpărături în două etape.

În prima etapă a cheltuit o treime din sumă, iar în etapa a doua a cheltuit trei pătrimi din ce i-a rămas și constată că mai are suma de 32,50 lei.

Aflați suma de bani pe care o avea Teodora la început.

Rezolvare:

Pentru rezolvarea problemei, folosim metoda mersului invers, împreună cu metoda figurativă.

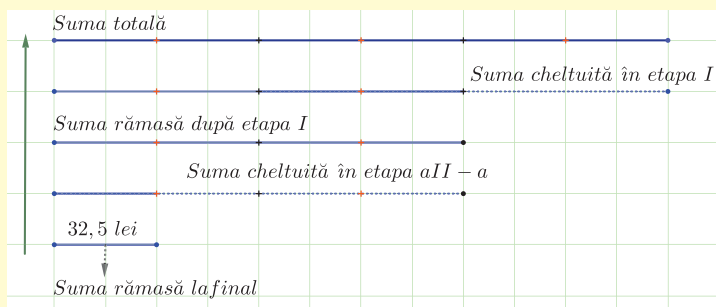
Urmărim suportul grafic în sensul indicat de săgeata verde, adică de jos în sus.

Suma de 32,50 lei reprezintă o pătrime din suma pe care o avea după prima etapă. În concluzie, după prima etapă, i-au rămas $32,50 \cdot 4 = 130$ (lei). Cum în prima etapă a cheltuit o treime din suma totală, atunci 130 lei reprezintă două treimi din suma totală.

O treime din suma inițială reprezintă

$130 : 2 = 65$ (lei), iar suma totală este

$65 \cdot 3 = 195$ (lei).



6. Rezolvați problema folosind metoda falsei ipoteze.

Cantitatea de 80 litri de apă se pune în 25 de vase, unele cu capacitatea 2,75 litri, altele cu capacitatea 5 litri.

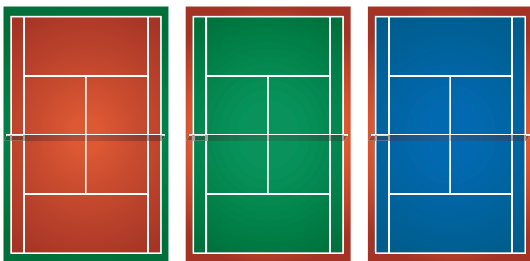
Aflați câte vase au capacitatea 5 litri și câte au capacitatea 2,75 litri.

Rezolvare. Considerăm că toate vasele sunt de 5 litri. În această ipoteză, în cele 25 de vase, ar fi $25 \cdot 5 = 125$ (litri). Diferența $125 - 80 = 45$ (litri), care apare în plus, provine din faptul că s-au folosit și vase de 2,75 litri. Pentru fiecare vas de 2,75 litri, noi am adăugat $5 - 2,75 = 2,25$ (litri). Prin urmare, numărul vaselor de 2,75 litri este $45 : 2,25 = 20$, iar numărul celor de 5 litri este $25 - 20 = 5$.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Trei terenuri de tenis ocupă o suprafață de 403,2 metri pătrați. Aflați ce suprafață vor ocupa cinci terenuri de tenis cu aceleași dimensiuni.



2. Pentru patru cutii de vopsea, Irina plătește 150,8 lei. Aflați ce sumă ar plăti Irina pentru cinci cutii de vopsea de același fel.

3. Dintr-un balot s-au folosit 19,6 metri de pânză pentru confecționarea a 8 fețe de masă. Știind că din balot au mai rămas 4,9 metri de pânză, aflați numărul fețelor de masă de același fel care se pot confecționa din pânza întregului balot.



4. Ana și Maria cumpără mere și struguri de aceeași calitate. Pentru 3,5 kg mere și 2,5 kg struguri, Ana plătește 38,25 lei, iar pentru $3\frac{1}{2}$ kg mere și 2,25 kg struguri, Maria plătește 36 lei. Calculați cât costă un kilogram de mere și cât costă un kilogram de struguri.



5. Un buchet de flori format din trei trandafiri și două gerbera costă 48,50 lei, iar un buchet de flori format din doi trandafiri și trei gerbera costă 41,50 lei. Calculați cât ar costa un buchet format din șapte trandafiri.
6. Calculați $\overline{ab} + \overline{cd}$, știind că $2 \cdot \overline{a,b} + 7 \cdot \overline{c,d} = 26,2$ și $4 \cdot \overline{a,b} + \overline{c,d} = 8,2$.
7. Gabriel parcurge 38,5 km, mergând trei ore cu bicicleta și două ore pe jos. Dacă ar fi mers două ore cu bicicleta și trei ore pe jos, ar fi parcurs 29 km. Aflați câți kilometri parcurge Gabriel, într-o oră pe jos și câți km parcurge într-o oră cu bicicleta.
8. Suma dintre 75 % din p și 50 % din q este 6,6, iar suma dintre 75 % din q și 50 % din p este 7,15.
a) Aflați suma numerelor raționale p și q .
b) Aflați diferența numerelor raționale p și q .
c) Aflați numerele raționale p și q .
9. Două colete cântăresc 23,35 kg. Aflați cât cântărește fiecare, știind că unul dintre ele cântărește cu 4,65 kg mai puțin decât celălalt.
10. Dintre elevii unei școli de arte, 20% studiază vioara, de două ori mai mulți studiază pianul, iar restul de 260 de elevi studiază violoncelul. Aflați câți elevi studiază fiecare instrument, știind că fiecare elev studiază unul dintre cele trei instrumente.
11. Suma a două numere este 28,8. Aflați numerele știind că dacă împărțim un număr la celălalt obținem rezultatul 3,5.
12. Într-un siloz s-au adus în trei zile 23,7 tone cereale. În a doua zi s-a adus o cantitate mai mare cu 3,5 tone decât în prima zi și de două ori mai mare decât în a treia zi. Aflați cantitatea de cereale adusă la siloz în fiecare din cele trei zile.

13. Perimetrul unei grădini dreptunghiulare este 79,6 metri. Aflați dimensiunile grădinii, știind că jumătate din lățimea grădinii este mai mică cu 1,05 metri decât jumătate din lungime.
14. Costin scrie pe tablă un număr. Dan șterge numărul și scrie un număr de 2,2 ori mai mare. Sergiu șterge și el acest număr și scrie numărul 22,22 care este cu 2,2 mai mare decât numărul scris de Dan. Aflați numerele scrise pe tablă de Dan și Costin.
15. Vlad urcă de la cabana unde s-a cazat, spre vârful muntelui, pe un traseu marcat. După ce a parcurs $\frac{5}{6}$ din distanță, ajunge la un marcaj și află că mai are 1,8 km până în vârf. Aflați distanța de la cabană până în vârf.




16. O fermă agricolă vinde trei cincimi din producția de cereale obținută, iar restul de 4,24 tone este împărțită asociațiilor fermei. Calculați cantitatea de cereale obținută de ferma agricolă.
17. În 53 de coșuri s-au pus 594,25 kg afine și zmeură; afinele în coșuri de 12,5 kg, iar zmeura în coșuri de 7,25 kg. Aflați în câte coșuri s-a pus zmeură.
18. Denisa și colegii ei au planificat realizarea unor proiecte pe durata a trei săptămâni: pentru prima săptămână 0,(3) din numărul proiectelor, pentru a doua săptămână 0,75 din restul proiectelor și în ultima săptămână ultimele 3 proiecte. Aflați numărul proiectelor pe care trebuie să le realizeze echipa Denisei.



19. Un colet în valoare de 90,90 lei conține 15 obiecte, caiete și blocuri de desen. Știind că un caiet costă 4,5 lei, iar un bloc de desen costă 8,4 lei, aflați câte caiete și câte blocuri de desen sunt în colet.



 **20.** O bară metalică, cu lungimea 0,255 m, este împărțită în 8 bucăți, unele de 2,5 cm, altele de 3,6 cm. Determinați numărul bucăților de 2,5 cm și numărul bucăților de 3,6 cm.

21. O firmă de transport alimentează cu 8,46 hl combustibil cele 10 autobuze ale sale. Se știe că unele rezervoare ale autobuzelor au capacitatea de 90,8 litri, iar altele au capacitatea 75,3 litri. Aflați câte autobuze au rezervoare cu capacitatea 75,3 litri.

22. La un concert, prețul unui bilet la lojă este 8,40 euro, iar prețul unui bilet în sală este 6,50 euro. Aflați numărul biletelor care s-au vândut la lojă, știind că s-au încasat 697,50 euro pentru 100 de bilete vândute.



Minitest

- (30p) **1.** Formulați și rezolvați o problemă ale cărei date să fie legate prin egalitatea $(a + 2) \cdot 2,5 - 3,8 = 25,25$.
- (30p) **2.** Pentru confecționarea a patru rochii și trei fuste este nevoie de 10,5 metri de material, iar pentru a confecționa două rochii și cinci fuste se folosesc 7,7 metri de material. Aflați de câți metri de material este nevoie pentru confecționarea unei rochii.
- (30p) **3.** Dacă ar cumpăra trei bilete la un meci de baschet, Sorin ar plăti 17,40 euro. Aflați ce sumă trebuie să plătească dacă mai invită doi prieteni la meci. Exprimați suma necesară în lei, știind că, în acea zi, cursul de schimb valutar leu-euro era 4,70 lei pentru un euro.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

- (5p) **1.** Frația zecimală cu 1,23 mai mare decât 9,8 este
- (5p) **2.** Diferența dintre 6,54 și 4,56 este
- (5p) **3.** Produsul fracțiilor 2,4 și 3,5 este
- (5p) **4.** Împărțind 20,48 la 1,6 se obține

II. Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- (5p) **1.** Un metru de stofă costă 54,50 lei. Pentru 5,4 metri de stofă de același fel vom plăti:
A. 294,30 lei; **B.** 294,20 lei; **C.** 294,40 lei; **D.** 294,50 lei.
- (5p) **2.** Pentru 2,5 kg cartofi Sonia a plătit 8 lei. Prețul unui kilogram de cartofi a fost:
A. 2,70 lei; **B.** 2,80 lei; **C.** 3,40 lei; **D.** 3,20 lei.
- (5p) **3.** Pentru 8,5 euro, Sorin a plătit 41,99 lei. Cursul euro-leu a fost în acea zi:
A. 1 euro pentru 4,30 lei; **B.** 1 euro pentru 4,94 lei;
C. 1 euro pentru 4,95 lei; **D.** 1 euro pentru 4,96 lei.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (15p) **1.** Se consideră numerele: $x = (0,2)^2 + 32,26$; $y = 1,2 \cdot 2,3 + 4,56 \cdot 10 - 38,4 : 3,2$ și $z = [0,(2) + 1,(3)] \cdot \frac{999}{56}$.
- (15p) **a)** Efectuați calculele și aflați x , y , z .
- (15p) **b)** Precizați ordinea descrescătoare a numerelor x , y , z .
- 2.** Media aritmetică a trei numere este 13,2. Primul număr este de 2 ori mai mic decât al doilea și cu 1,2 mai mare decât al treilea. Aflați:
- (15p) **a)** suma celor trei numere;
- (10p) **b)** cele trei numere.

Se acordă 10 puncte din oficiu.





3 PROBLEME DE ORGANIZARE A DATELOR

1 Probleme de organizare a datelor; frecvență

Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Informațiile pe care ne bazăm în viața de zi cu zi, în numeroase cazuri, se obțin din concluzii formulate în urma unor *studii statistice*. Un studiu statistic se realizează în scopul cunoașterii, interpretării, evaluării și reglării unui fenomen de masă, din natură sau din societate, din perspectiva unei *particularități*.

Studiul are în vedere o anumită trăsătură a fenomenului, pe care o vom numi *caracteristică* sau *variabilă* și care este descrisă printr-un număr *semnificativ de subiecți* (persoane, grupuri de persoane, anumite tipuri de obiecte) care formează un *eșantion*. *Caracteristica* studiată se poate exprima prin *valori numerice* sau prin *însușiri*. Numerele corespunzătoare, respectiv însușirile pe care le poate avea *variabila* se numesc *valori* ale caracteristicii.



Exemple.

- Cei 26 de elevi ai clasei a V-a B, au obținut la un test următoarele note: *Variabila:* „Nota la test”
9, 4, 5, 9, 6, 8, 8, 7, 8, 9, 9, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 10, 8, 8, 9, 10, 10, 8, 7, 10.
Valorile pe care le poate lua sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
S-a acordat un punct din oficiu.
- Elevii unei școli pot studia una dintre limbile moderne: engleză, franceză, germană. Opțiunea elevilor pentru „Limba modernă dorită”
se concretizează în precizarea uneia dintre *valorile:* engleză, franceză, germană. Cei 26 de elevi ai clasei au următoarele opțiuni: *Variabila:* „Limba modernă dorită”
Valorile pe care le poate lua sunt: E, F, G.
E, G, E, F, G, E, E, G, F, F, G, E, E, E, F, G, G, E, G, F, E, E.

Am notat cu *E* opțiunea pentru limba engleză, cu *F* opțiunea pentru limba franceză și cu *G* opțiunea pentru limba germană.

Datele (informațiile) scrise în exemplele de mai sus au fost *culese* prin intermediul unor *sondaje* sau *chestionare*, direct, de la *subiecți* și au fost *înregistrate* fără a dezvălui identitatea acestora.

Organizarea datelor statistice în tabele: frecvență

Este dificil ca în același timp să *comparăm valorile*, să *stabilim modul în care evoluează fenomenul*, să *interpretăm datele* și să *stabilim acțiuni viitoare utile*.

Pentru a putea fi observate, analizate, evaluate, interpretate, *datele* (informațiile) *culese* sunt *organizate* (*ordonate, grupate*) în funcție de valoarea pe care o iau și sunt înregistrate în *tabelul de date*, al studiului statistic.

Datele se scriu în ordine, în funcție de valorile luate. Dacă sunt date numerice (se exprimă prin numere), se ordonează, de regulă, crescător. Dacă nu sunt date numerice (nu se exprimă prin numere) stabilim ordinea așa cum o dorim.

Exemple. 1. „Nota la test”

Ordonarea datelor: 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10.

2. „Limba modernă dorită”

Ordonarea datelor: E, E, E, E, E, E, E, E, E, E, F, F, F, F, F, F, G, G, G, G, G, G, G, G, G.

Ne interesează, de exemplu, câți elevi au luat notă *mai mare decât 8* sau câți elevi *optează pentru limba germană*. Ne-ar fi de mare folos dacă n-ar trebui să numărăm *de câte ori apare* fiecare valoare, de fiecare dată. În acest scop, *datele* se organizează într-un *tabel de frecvențe*, care conține, pe linia I, *valorile variabilei* și pe linia a II-a, *numărul apariției fiecărei valori*.

Numărul apariției unei valori a caracteristicii în tabelul de date se numește *frecvența* acestei valori.

Exemple. 1. „Nota la test”

Tabel de frecvențe:

Nota la test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul aparițiilor/ frecvența valorii	0	0	0	1	1	3	4	7	6	4

Tabel de frecvențe:

Limba modernă preferată	Limba engleză	Limba franceză	Limba germană
Numărul aparițiilor/ frecvența valorii	11	6	9

Tabelul frecvențelor ne oferă posibilitatea de a răspunde cu ușurință la o serie de întrebări referitoare la setul de date statistice.

De exemplu: Folosind tabelul de frecvențe „Nota la test”, putem determina:

- Rezolvare. 1.** Adunăm frecvențele valorilor 8, 9, 10 și obținem $7 + 6 + 4 = 17$ (elevi).
2. Adunăm frecvențele valorilor 1, 2, 3, 4 și obținem $0 + 0 + 0 + 1 = 1$ (elev).
3. Frecvența notei 8 este 7 și este cea mai mare.
- 1.** numărul elevilor care au note mai mari decât 7;
2. numărul elevilor care au note mai mici decât 5;
3. nota care are cea mai mare frecvență.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1.** În biblioteca unei școli sunt 45 dicționare, 75 albume, 240 manuale și auxiliare didactice, iar restul de 75% din totalul cărților existente sunt cărți din bibliografia școlară.
- a)** Aflați numărul cărților din biblioteca școlii.
b) Realizați tabelul frecvențelor pentru „Tipuri de cărți în biblioteca școlii”, conform datelor problemei.
- 2.** Datele privind înălțimea elevilor din echipa de handbal a unei școli, inclusiv rezerve, sunt prezentate în tabelul următor:

Înălțimea (h)	$165 \leq h < 170$	$170 \leq h < 175$	$h \geq 175$
Numărul elevilor cu această înălțime/Frecvența	2	8	x

Se știe că numărul elevilor cu înălțimea cel puțin egală cu 170 cm și mai mică decât 175 cm, reprezintă 50% din numărul total al elevilor. Determinați:

- a)** numărul elevilor cu înălțimea cel puțin 175 cm;
b) numărul total al elevilor.
- 3.** Mai mulți elevi din trei școli participă la un concurs sportiv. În tabelul următor este înregistrat numărul participanților din fiecare școală și numărul premiilor obținute de aceștia.

Școala Gimnazială Nr. 1		Școala Gimnazială Nr. 12		Școala Gimnazială „Mihai Eminescu”	
Participanți	Premiați	Participanți	Premiați	Participanți	Premiați
45	13	52	8	63	19

Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- a)** Numărul elevilor care au participat la concurs a fost:
A. 162; **B.** 161; **C.** 160; **D.** 151.
- b)** Numărul elevilor care au fost premiați a fost:
A. 30; **B.** 40; **C.** 39; **D.** 38;
- c)** Exprimat în procente, numărul elevilor care au premii este:
A. 22%; **B.** 28%; **C.** 30%; **D.** 25%.

L2 Grafice cu bare și/sau cu linii. Media unui set de date statistice

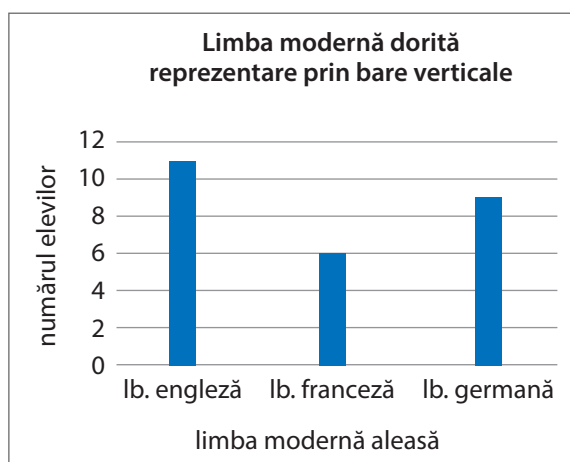
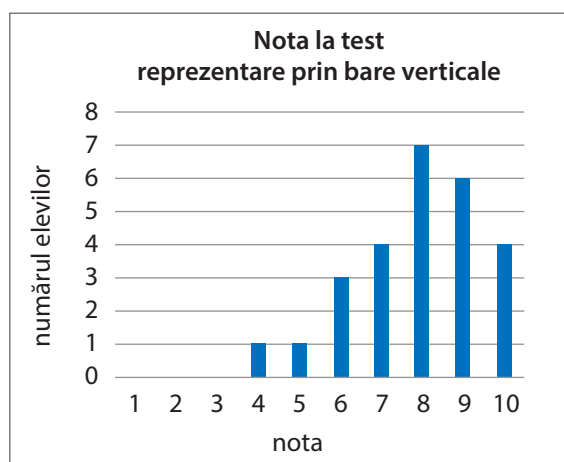
Reprezentarea unui set de date statistice prin grafice cu bare și/sau cu linii

Informațiile stocate în *tabelele de frecvențe* pot fi reprezentate vizual, prin *grafice* sau *diagrame*. Considerăm două semidrepte cu originea comună, una în poziție orizontală, notată Ox și una în poziție verticală, notată Oy .

1. Diagramă cu bare

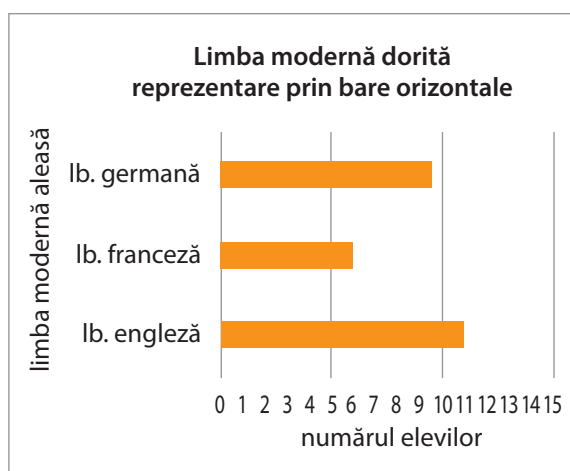
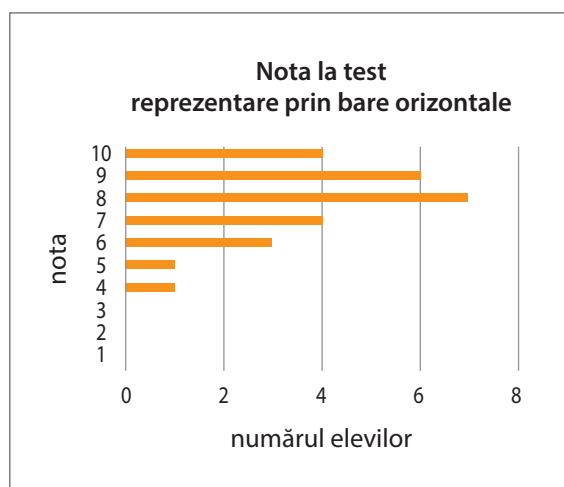
a) Diagramă cu bare verticale (coloane)

Pe axa Ox se vor trece *valorile* variabilei, iar pe axa Oy se vor trece *frecvențele* corespunzătoare acestor valori. Se reprezintă apoi *bare* verticale, cu un capăt pe axa Ox , în *valoarea* dorită și cu celălalt capăt la înălțimea corespunzătoare *frecvenței* acestei valori.



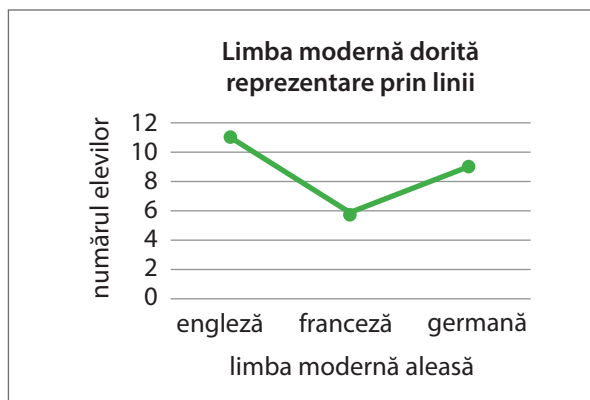
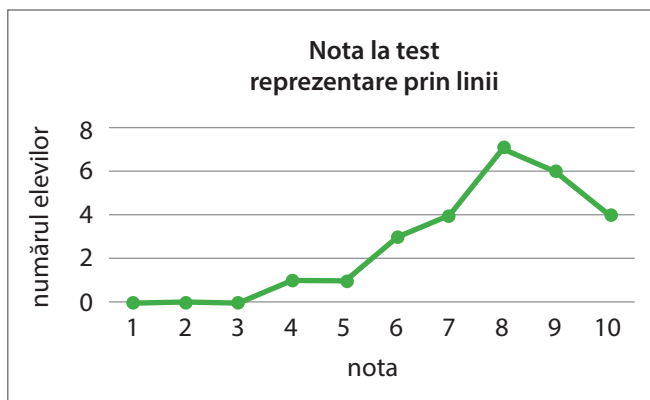
b) Diagramă cu bare orizontale (benzi)

Pe axa Oy se vor trece *valorile* variabilei, iar pe axa Ox se vor trece *frecvențele* corespunzătoare acestor valori. Se reprezintă apoi *bare* orizontale, cu un capăt pe axa Oy , în *valoarea* dorită și cu lungimea corespunzătoare *frecvenței* acestei valori.



2. Diagramă cu linii.

Pe axa Ox se trec valorile variabilei, iar pe axa Oy se trec frecvențele corespunzătoare acestor valori. Pentru fiecare valoare a variabilei se reprezintă punctul din plan situat la intersecția dintre verticala prin această valoare și orizontala prin frecvența acesteia. Punctele obținute în acest fel se unesc printr-o linie frântă, care va fi reprezentarea prin linii a seriei de date statistice.



Media unui set de date statistice

Revenim la variabila „Nota la test”. Pentru a observa progresul clasei, dorim să calculăm media notelor elevilor clasei la acest test.

Observând reprezentările geometrice de mai sus, putem *estima* media clasei la *aproximativ* 8, sau putem calcula media aritmetică a tuturor notelor obținute de elevii clasei.

Pentru seria de date statistice „Nota la test”, media este numărul

$$m_a = \frac{4+5+6+6+6+6+7+7+7+7+7+8+8+8+8+8+8+8+8+9+9+9+9+9+9+10+10+10+10}{26} =$$

$$= \frac{4+5+6 \cdot 3+7 \cdot 4+8 \cdot 7+9 \cdot 6+10 \cdot 4}{26} = 7,8(846153). \text{ Cu două zecimale exacte, obținem } m = 7,88, \text{ care ne}$$

arată că am făcut o estimare foarte bună.

Observație. Sunt și situații în care este dificil să facem estimări atât de apropiate de media obținută prin calcul.



Reținem

Media unui set de date numerice este media aritmetică a tuturor valorilor variabilei acestuia.

Aceasta se calculează, de regulă, cu două zecimale exacte.

Observație. Variabila „Limba modernă preferată” nu este numerică (valorile sale nu se exprimă prin numere), deci *nu se poate vorbi de medie* a setului de date corespunzător.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Notele obținute de cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, la un test la matematică, sunt: 6, 8, 9, 10, 5, 8, 7, 9, 10, 10, 7, 9, 10, 9, 10, 7, 6, 8, 9, 8, 9, 10, 9, 9, 8. Se știe că au fost acordate 2 puncte din oficiu.

a) Completați tabelul frecvențelor.

Nota	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența									

- b) Comparați frecvența notei 8 cu frecvența notei 9.
 c) Precizați valoarea (nota) care are frecvența cea mai mare.
 d) Estimați media notelor la test, cu ajutorul datelor din tabelul realizat la subpunctul a).
 e) Calculați media notelor obținute la test și comparați-o cu valoarea estimată.
2. În acest an școlar, Gabriel a obținut la geografie următoarele rezultate:

	Note obținute la evaluare orală	Nota la test	Nota pentru proiect
Semestrul I	8, 10	9	10
Semestrul al II-lea	9, 10, 10	8	10

- a) Realizați tabelul frecvențelor seriei statistice „Note la geografie – semestrul I”, apoi tabelul frecvențelor seriei statistice „Note la geografie – semestrul al II-lea”.

Model de rezolvare. „Note la geografie – semestrul I”

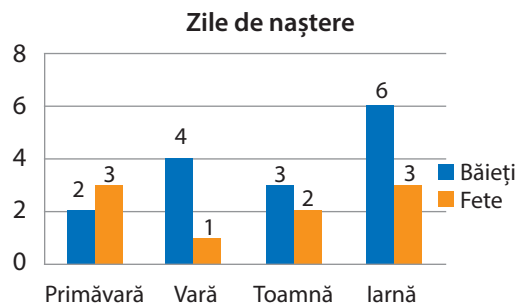
nota	8	9	10
frecvența	1	1	2

- b) Calculați media obținută de Gabriel la geografie în semestrul I, apoi rotunjiți valoarea obținută, la unități.
 c) Calculați media obținută de Gabriel la geografie în semestrul al II-lea, apoi rotunjiți valoarea obținută, la unități.
 d) Precizați, comparând mediile semestriale obținute, dacă Gabriel a progresat la geografie.

3. Diagrama alăturată reprezintă repartizarea elevilor unei clase (fete și băieți), în funcție de anotimpul în care își serbează ziua de naștere.

Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu răspunsul corect.

- a) Numărul elevilor din clasă este
 b) Frecvența cea mai mare a zilelor în care se sărbătoresc băieții este în anotimpul
 c) Realizați tabelul frecvențelor cu datele seriei statistice „Ziua de naștere - fete”, apoi tabelul frecvențelor cu datele seriei statistice „Ziua de naștere - băieți”.



4. Pentru alegerea căpitanului echipei de fotbal a unei școli, au candidat patru elevi: Adrian a obținut 32% din voturi, Bogdan a obținut 28% din voturi, Darius a obținut 20% din voturi, iar Emil a obținut restul, de 5 voturi.

- a) Aflați procentul de voturi obținute de Emil, știind că nu au fost voturi anulate.
 b) Aflați numărul de voturi obținute de fiecare candidat.
 c) Realizați tabelul frecvențelor seriei statistice „Căpitanul echipei de fotbal”, pe baza rezultatelor obținute la subpunctul b).
 d) Realizați graficul cu bare corespunzător numărului voturilor pentru alegerea căpitanului echipei de fotbal.

Consultați manualul digital pentru a afla cum se poate realiza o diagramă, folosind un soft matematic.

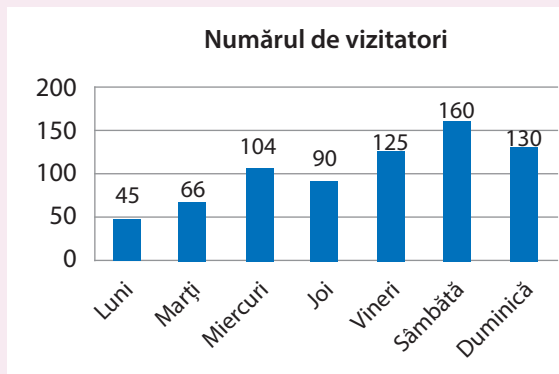




Minitest

Un muzeu a avut vizitatori, într-o săptămână, după cum reiese din diagrama alăturată:

- (15p) **a)** Precizați ziua în care au fost cei mai mulți vizitatori.
- (15p) **b)** Precizați ziua în care au fost 125 de vizitatori.
- (15p) **c)** Precizați zilele în care au fost mai mulți vizitatori decât miercuri.
- (15p) **d)** Calculați numărul vizitatorilor din săptămâna analizată.
- (15p) **e)** Precizați numărul zilelor în care numărul vizitatorilor a fost mai mare decât 100.
- (15p) **f)** Realizați tabelul frecvențelor seriei statistice „Vizitatori”.



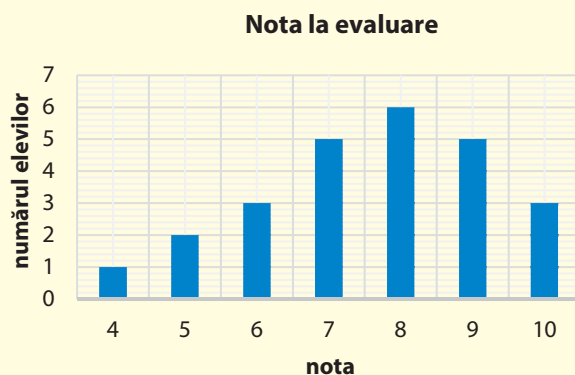
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare / autoevaluare

Subiectul I

Pe foaia de test sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

- (25p) **1.** Pe o lungime de 48 de metri se plantează gard viu, în trei zile. În a doua zi se plantează pe o lungime cu 4,8 metri mai mare decât în prima zi și cu 1,2 metri mai mică decât în a treia zi. Aflați lungimile porțiunilor plantate în fiecare dintre cele trei zile.
- (25p) **2.** La un magazin se vând 150 kg pere, de două calități, unele cu 4,50 lei kilogramul și altele cu 6,50 lei kilogramul, încasându-se în total 855 de lei. Aflați cantitățile de pere vândute din fiecare calitate.
- 3.** Rezultatele obținute de un grup de elevi la o evaluare sunt redate în diagrama alăturată.
- (10p) **a)** Realizați tabelul de frecvențe „Nota la evaluare”, folosind datele din diagramă.
- (10p) **b)** Aflați:
b₁) numărul participanților la această evaluare.
b₂) numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 7.
- (5p) **c)** Precizați nota care are frecvența cea mai mare.
- (5p) **d)** Exprimați în procente frecvența notei 8, în raport cu numărul participanților.
- (10p) **e)** Calculați media clasei la evaluare.



Se acordă 10 puncte din oficiu.



Test de evaluare sumativă

Subiectul I. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

- (10 p) 1. Scrisă sub formă de fracție zecimală, fracția $\frac{279}{100}$ devine:
A. 0,279; B. 2,79; C. 27,9; D. 0,0279.
- (10 p) 2. Sub formă de fracție ordinară ireductibilă, fracția zecimală 4,75 este:
A. $\frac{17}{2}$; B. $\frac{19}{2}$; C. $\frac{17}{4}$; D. $\frac{19}{4}$.
- (10 p) 3. Dacă fracția $\frac{1\bar{x}}{45}$ se transformă în fracție zecimală finită, atunci numărul $\bar{1x}$ este:
A. 12; B. 15; C. 18; D. 10.

Subiectul al II-lea. Pe foaia de test, completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

- (10 p) 1. Media aritmetică a numerelor raționale 0,5; 10 și 3,24 este
- (15 p) 2. Comparați fracțiile, apoi completați spațiile libere cu unul dintre simbolurile $>$, $<$ sau $=$, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.
a) 1,23 ... 1,234; b) 2,342 ... 2,339; c) 0,(5) ... $\frac{15}{27}$.

Subiectul al III-lea. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

- (10 p) 1. O eșarfă, o bluză și o pereche de pantaloni costă împreună 260,75 lei. Știind că prețul bluzei este de 3 ori mai mare decât cel al eșarfei și cu 31,50 lei mai mic decât prețul pantalonilor, calculați prețul fiecărui articol de îmbrăcăminte.



- (10 p) 2. Arătați că $[0,(8) + 1,(87)] : 3,0(4) < 1$.
- (15 p) 3. Se consideră numerele raționale $m = (10,11 - 9,91) : 4 + 3,95$, $n = (1,408 + 1,31) : (3,05 - 1,25)$ și $p = 0,01 + 5,4 : 1,2$. Arătați că numărul $m + n - p$ este număr natural.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 50 minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.





Schemă recapitulativă a capitolului



CAPITOLUL IV

ELEMENTE DE GEOMETRIE ȘI UNITĂȚI DE MĂSURĂ



1. PUNCT, DREAPTĂ, PLAN, SEMIDREAPTĂ, SEMIPLAN, SEGMENT DE DREAPTĂ
2. UNGHURI
3. FIGURI CONGRUENTE. AXĂ DE SIMETRIE
4. UNITĂȚI DE MĂSURĂ



Competențe specifice: 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3.

PROIECT • PROVOCARE

Mai aproape de viitor,
învățând geometria
cu GeoGebra



A. Dacă veți răspunde „provocării” noastre, atunci:

- ✓ veți cunoaște facilitățile pe care le oferă **GeoGebra** pentru înțelegerea intuitivă a geometriei elementare plane;
- ✓ veți ști să reprezentați prin intermediul aplicației **GeoGebra** unele configurații geometrice simple, în acord cu lecțiile de geometrie parcurse;
- ✓ veți ști să modificați și să salvați un fișier **GeoGebra**;
- ✓ veți putea urmări anumite proprietăți geometrice, realizând modificări specifice configurației (de exemplu, deplasarea unui punct în plan sau pe un obiect geometric);
- ✓ veți putea salva fișierele **GeoGebra** și în alte formate (de exemplu, png);
- ✓ veți ști să realizați în **GeoGebra** configurații necesare abordării unor probleme teoretice și practice și să le folosiți pentru rezolvarea acestora.

B. Prezentarea softului

1. **GeoGebra** este un soft educațional cu aplicații multiple în matematica elementară, care a fost creat în 2001 de profesorul austriac Markus Hohenwarter ca teză de masterat la Universitatea din Salzburg. Softul este gratuit, tradus în multe limbi (inclusiv în limba română) și poate fi un ajutor prețios în multe domenii ale matematicii.
2. În geometrie, **GeoGebra** realizează cu acuratețe figurile geometrice și oferă avantajele:
 - ◆ poate verifica, vizual, proprietățile figurilor geometrice plane;
 - ◆ poate calcula mărimi geometrice (unghiuri, distanțe, arii);
 - ◆ poate desfășura animații cu elementele geometrice fundamentale.
 - ◆ poate afișa un text care însoțește o configurație geometrică.

Pentru detalii, consultați manualul digital.

C. „Provocări”

Veți găsi în manualul digital semnalate „provocările”, precum și indicații de lucru și câte un video în care vi se explică modul de realizare a provocării respective.

1 PUNCT, DREAPTĂ, PLAN, SEMIDREAPTĂ, SEMIPLAN, SEGMENT DE DREAPTĂ

L1 Punct, dreaptă, plan



Ne amintim

Punctul, dreapta și planul sunt noțiuni elementare ale geometriei. Acestea sunt reprezentate prin desene, folosind *convenții* de reprezentare și de notare.

PUNCTUL

Punctul poate fi asemănat cu urma lăsată de un instrument de scris foarte bine ascuțit, pe suprafața cu care intră în contact.

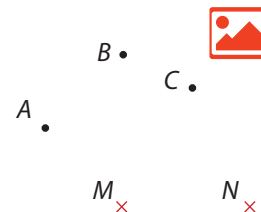
Punctul se reprezintă geometric printr-o bulină plină, cât mai mică, sau prin *intersecția* a două liniițe mici.

Notăm punctele cu litere mari, eventual cu indici: $A, B, C, M, N, P, M_1, M_2, M_3, \dots$

Observație. Punctul este caracterizat doar prin *poziție*. Punctul *nu are dimensiune*.

Două puncte A și B pot fi situate în același loc și spunem că sunt *puncte identice* sau *confundate* (coincid), sau pot fi situate în locuri diferite și atunci spunem că sunt *puncte distincte* (diferite).

Dacă punctele A și B coincid, scriem $A = B$, iar dacă sunt distincte, scriem $A \neq B$.



DREAPTA

Imaginea unei porțiuni dintr-o dreaptă este ca *un fir de ață foarte subțire și bine întins*. Considerând porțiunea de dreaptă *nemărginită* în ambele sensuri, descriem o *dreaptă*.

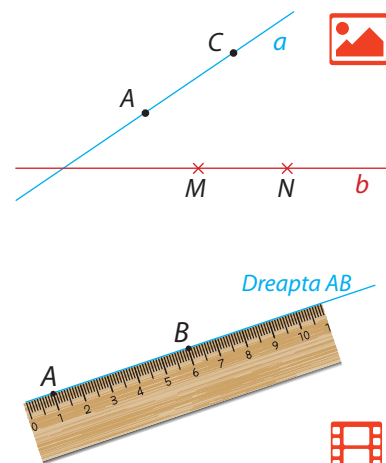
O dreaptă este formată dintr-o *infinițate de puncte*.

Notăm dreptele cu litere mici, eventual cu indici: a, b, c, \dots sau d_1, d_2, d_3, \dots sau cu ajutorul a două litere mari care numesc două puncte distincte ale dreptei: AC, MN, PQ, \dots

Pentru reprezentarea unei *porțiuni de dreaptă*, utilizăm *rigla*.

Dreapta este *nemărginită*, *nesfârșită* în ambele părți, deci nu va putea fi reprezentată integral.

Urma lăsată de instrumentul de scris care se deplasează, sprijinindu-se pe riglă, este *reprezentarea geometrică a unei drepte*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Două drepte d_1 și d_2 pot avea toate punctele comune (dreptele coincid) și spunem că în acest caz dreptele sunt *identice* sau *confundate*.

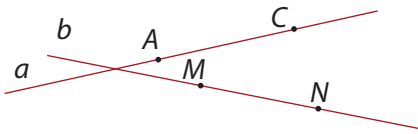
Dacă d_1 și d_2 sunt *identice*, atunci scriem $d_1 = d_2$.

Două drepte d_1 și d_2 care nu sunt identice sunt drepte *distincte* (diferite).

Dacă d_1 și d_2 sunt *distincte*, atunci scriem $d_1 \neq d_2$.

Dicționar

convenție = înțelegere, acord cu privire la anumite probleme sau anumite obiective.



Dreptele AC și a coincid; scriem $AC = a$.
 Dreptele MN și b coincid; scriem $MN = b$.
 Dreptele AC și MN sunt distincte; scriem $AC \neq MN$.
 Dreptele a și b sunt distincte; scriem $a \neq b$.
 Dreptele AC și b sunt distincte; scriem $AC \neq b$.
 Dreptele a și MN sunt distincte; scriem $a \neq MN$.

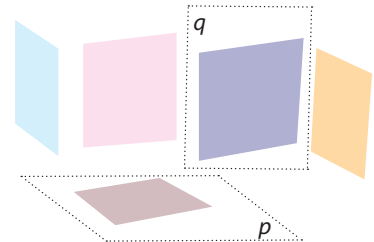
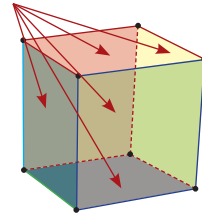
PLANUL

Imaginea unei porțiuni dintr-un plan este ca *suprafața sticlei colorate a unui geam* sau ca *suprafața unei mese*. Considerând porțiunea de plan nemărginită în orice direcție, obținem *descrierea unui plan*.

Planul se reprezintă, prin desen, sub forma unui *paralelogram*.

Planele se notează cu litere mici, eventual cu indici: p, q, r, s, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots sau cu litere din alfabetul grecesc: α (alfa), β (beta), γ (gama), π (pi),...

porțiuni de plan



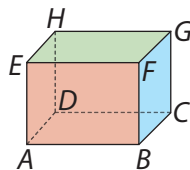
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



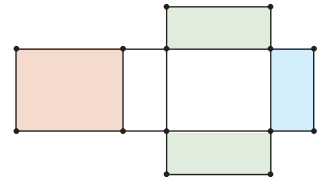
1. Observați în imagine Palatul Culturii din Iași. Am evidențiat trei puncte (cu roșu), două drepte (cu roz) și un plan (cu mov). Identificați alte patru puncte, patru drepte și patru plane. Urmăriți cu un indicator sau cu degetul pe imagine elementele identificate.



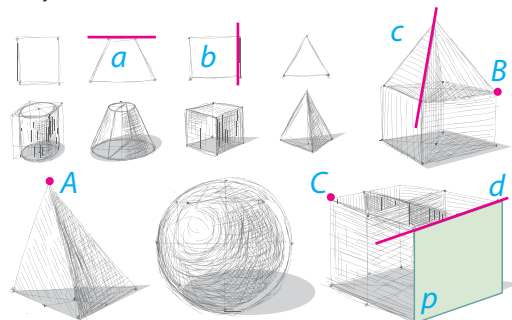
2. a) Desenați și notați punctele identice M și N .
 b) Desenați și notați punctele diferite P și Q .
3. Reprezentați și notați dreptele distincte AB, AC, AD .
4. a) Știind că fiecare față a unui paralelipiped este o porțiune dintr-un plan, fiecare vârf este un punct și că fiecare muchie este o porțiune de dreaptă, numiți 8 puncte și 12 drepte distincte, folosind imaginea alăturată.



- b) Desenați pe un carton figura alăturată, decupați-o, apoi pliați-o astfel încât să obțineți un paralelipiped. Identificați planele corespunzătoare fețelor paralelipipedului.



5. În imaginea de mai jos, sunt schițate mai multe figuri geometrice și corpuri geometrice, pe care le-ați întâlnit în clasele anterioare.



- a) Numiți punctele, dreptele și planele evidențiate și notate.
- b) Desenați pe caiete un cub și evidențiați:
 - b_1) patru puncte distincte, prin albastru;
 - b_2) trei drepte distincte, prin portocaliu;
 - b_3) două plane distincte, prin verde.



Știați că ...?

Palatul Culturii din Iași reprezintă o împletire armonioasă a mai multor stiluri arhitecturale: neogotic, romantic, baroc.



L2 Poziții relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare

Cu privire la imaginea alăturată, se pot formula enunțurile:

- p_1 : Pe un fir de curent electric se află mai multe păsări.
- p_2 : În imagine, există păsări care nu sunt pe fire.
- p_3 : În imagine, există fire pe care nu se află nicio pasăre.
- p_4 : Firele din imagine nu se întâlnesc.
- p_5 : Pe fiecare fir se pot așeza foarte, foarte multe păsări.

Din punct de vedere geometric, vedem în imagine niște porțiuni de drepte și niște puncte, în diferite poziții unele față de altele.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Poziția (relativă) pe care un punct o poate avea față de o dreaptă se poate caracteriza astfel:

Poziția	Punctul A este un punct al dreptei d	Punctul A nu este punct al dreptei d
Citire, interpretare	<ul style="list-style-type: none"> • punctul A <i>aparține</i> dreptei d; • punctul A <i>este situat pe</i> dreapta d; • dreapta d <i>conține</i> punctul A; • dreapta d <i>trece prin</i> punctul A; • punctul A <i>este interior</i> dreptei d. 	<ul style="list-style-type: none"> • punctul A <i>nu aparține</i> dreptei d; • punctul A <i>nu este situat pe</i> dreapta d; • dreapta d <i>nu conține</i> punctul A; • dreapta d <i>nu trece prin</i> punctul A; • punctul A <i>este exterior</i> dreptei d.
Reprezentare geometrică		

Exemple: Pentru situația prezentată în desenul alăturat se pot face afirmațiile de mai jos.

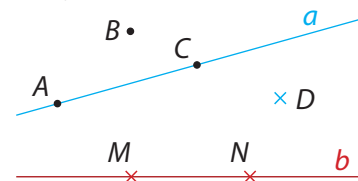
Punctele A și C *aparțin* dreptei a .

Punctele M și N *aparțin* dreptei b .

Punctele A și C *nu aparțin* dreptei b .

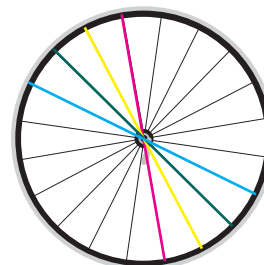
Punctele M și N *nu aparțin* dreptei a .

Punctele B și D *nu aparțin* nici dreptei a și nici dreptei b .



Ne propunem să aflăm câte drepte distincte pot trece printr-un punct dat și câte drepte distincte pot trece prin mai multe puncte.

Pentru a afla câte drepte distincte trec printr-un punct, este suficient să observăm spițele unei roți de bicicletă. Intuim că pe lângă dreptele evidențiate deja, prin centrul cerului se pot construi oricât de multe drepte. În concluzie, *printr-un punct* se pot construi o *infinitate* de drepte distincte.



Dicționar

relativ, -ă = care se referă la ceva sau la cineva; care se definește sau se calculează prin raportarea la o altă mărime sau la anumite condiții concrete.

Pentru reprezentarea geometrică (printr-un desen) a unei porțiuni de dreaptă, folosim instrumentul geometric numit *riglă*, gradată sau negradată. Cu ajutorul ei vrem să construim o dreaptă care să conțină punctele distincte A și B . Observăm că nu se poate construi decât o singură dreaptă care îndeplinește această condiție. Am obținut astfel un prim *rezultat* al geometriei.

Enunț	Reprezentare geometrică d	Citire/Interpretare
Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.		Punctele distincte A și B determină dreapta AB .

Rezultă ușor că, dacă două drepte au două puncte distincte comune, atunci dreptele coincid. Dreptele AB și d au punctele comune A și B , $A \neq B$. Atunci, $AB = d$.

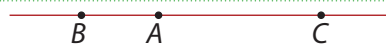
Trei sau mai multe puncte distincte care aparțin aceleiași drepte se numesc puncte coliniare.

Dacă nu există o dreaptă astfel încât punctele distincte A, B, C să-i aparțină, atunci cele trei puncte se numesc puncte necoliniare.

Pentru trei puncte coliniare A, B, C , sunt posibile situațiile:



B este între A și C sau B este între C și A și scriem $A - B - C$ sau $C - B - A$.



A este între B și C sau A este între C și B și scriem $B - A - C$ sau $C - A - B$.



C este între A și B sau C este între B și A și scriem $A - C - B$ sau $B - C - A$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicația 1

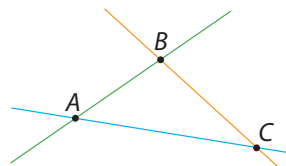
Desenați trei puncte distincte A, B, C . Trasați toate dreptele care trec prin cel puțin două puncte dintre acestea. Precizați câte drepte ați obținut, analizând toate cazurile posibile.

Soluție. Trei puncte distincte pot fi coliniare sau necoliniare. Ilustrăm prin două desene.

1. Dacă A, B, C sunt coliniare, obținem $AB = AC = BC$, adică o singură dreaptă.



2. Dacă A, B, C sunt necoliniare, se obțin dreptele distincte AB, AC, BC , adică 3 drepte.

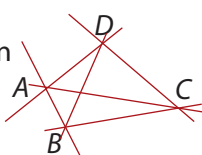


Aplicația 2

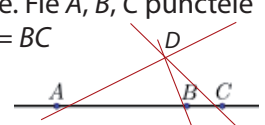
Desenați patru puncte distincte A, B, C, D , nu toate coliniare. Trasați toate dreptele care trec prin cel puțin două puncte dintre acestea. Precizați câte drepte ați obținut, analizând toate cazurile posibile.

Soluție. Sunt posibile următoarele situații.

1. Oricare trei puncte sunt necoliniare. Atunci se obțin 6 drepte distincte: AB, AC, AD, BC, BD, CD .

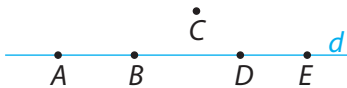


2. Trei puncte sunt coliniare, iar al patrulea nu aparține dreptei pe care acestea sunt situate. Fie A, B, C punctele coliniare. Atunci, se obțin $AB = AC = BC$ și dreptele distincte DA, DB și DC , în total 4 drepte.





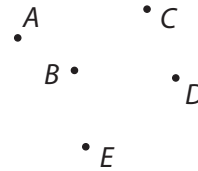
- Desenați:
 - o dreaptă d și punctele distincte A și B , situate pe dreapta d ;
 - o dreaptă g și punctele distincte C și D care nu aparțin dreptei g .
- Desenați un punct A , dreptele distincte a și b , care conțin punctul A , și dreapta d , care nu conține punctul A .
- Copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera **A**, dacă propoziția este adevărată, și litera **F**, dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F
a) Punctul D este interior dreptei d .	
b) Punctul C este exterior dreptei d .	
c) Punctele A, B, C sunt coliniare.	
d) Punctele A, C, E sunt necoliniare.	

- Desenați:
 - cinci puncte coliniare;
 - cinci puncte diferite, oricare trei necoliniare;
 - cinci puncte diferite, dintre care exact trei să fie coliniare.
- Desenați punctele A, B, P, Q , distincte două câte două, în fiecare dintre situațiile:
 - punctele A, B, P sunt coliniare;
 - punctele P și Q sunt coliniare cu A și necoliniare cu B .
 - Punctele A, B, P, Q sunt coliniare, în această ordine.

- Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
 - Printr-un punct pot trece:
 - o singură dreaptă;
 - exact două drepte diferite;
 - o infinitate de drepte.
 - Prin două puncte diferite pot trece:
 - două drepte diferite;
 - o singură dreaptă;
 - o infinitate de drepte.
- În figura următoare, sunt desenate punctele A, B, C, D, E , oricare trei necoliniare.



- Scrieți toate dreptele determinate de punctul A și oricare alt punct dintre cele date.
 - Precizați numărul dreptelor care se pot obține, unind punctele date, câte două.
- Desenați punctele A, B, C, D, E, F , oricare trei necoliniare. Desenați și numiți dreptele obținute, unind punctele două câte două.
 - Punctele A, B, C sunt coliniare și punctele A, B, D sunt, de asemenea, coliniare. Arătați că punctele A, B, C, D sunt coliniare.



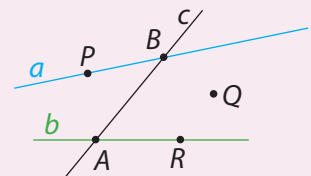
Dicționar

triplet = grup de trei



Minitest

- Observați desenul alăturat și numiți:
 - un punct situat pe dreapta a , care nu este situat pe dreapta c ;
 - un punct comun dreptelor b și c ;
 - trei triplete de puncte necoliniare.
- Se consideră nouă puncte diferite două câte două.
 - Precizați numărul minim al dreptelor care se pot obține unind punctele date, câte două.
 - Precizați numărul maxim al dreptelor care se pot obține unind punctele date, câte două.
 - Realizați un desen în care șase dintre cele nouă puncte sunt coliniare.



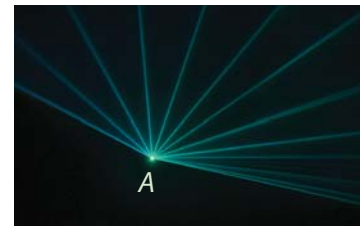
Se acordă 10 puncte din oficiu.

L3 Semidreaptă. Segment de dreaptă. Semiplan



Referitor la imaginea alăturată, putem spune:

- p_1 : Fiecare rază pornește din punctul A .
- p_2 : Fiecare rază este situată pe o dreaptă.
- p_3 : Fiecare rază este nemărginită, nesfârșită.
- p_4 : Din punctul A pot porni o infinitate de raze.
- p_5 : Fiecare rază poate fi imaginată ca o porțiune a unei drepte, care pornește dintr-un punct dat și este nesfârșită.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Considerăm dreapta d , pe care este situat punctul A .

SEMIDREAPTA

Porțiunea de dreaptă mărginită la un capăt de punctul A se numește *semidreaptă* cu originea în A .



Pentru reprezentarea unei semidrepte, se marchează originea acesteia și se reprezintă cu ajutorul riglei o porțiune de dreaptă, începând de la originea.

Observație. Fiecare punct al unei drepte generează două semidrepte, numite *semidrepte opuse*.

Considerăm punctele A, B, C pe dreapta d , astfel încât A să fie între B și C .

Semidreptele situate pe dreapta d , cu originea în A , se notează AC , respectiv AB .

Semidreapta cu originea A , care trece prin B , se notează AB (conține toate punctele colorate cu roșu).



Semidreapta cu originea A , care trece prin C , se notează AC (conține toate punctele colorate cu albastru).

Semidreptele AB și AC sunt *semidrepte opuse*.

Pe dreapta d , considerăm punctele distincte A și B .

SEGMENTUL DE DREAPTĂ

Porțiunea de dreaptă mărginită la un capăt de punctul A și la celălalt capăt de punctul B se numește *segment de dreaptă* cu capetele A și B .



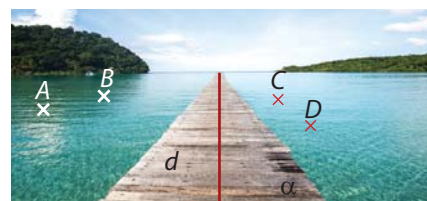
Toate punctele M , situate între A și B formează segmentul AB (sau segmentul BA). Punctele A și B sunt capetele segmentului AB .

Observație. Punctele distincte A și B determină, pe dreapta d , semidreptele AB , respectiv BA . Segmentul AB este format din toate punctele pe care le au în comun cele două semidrepte.



În imaginea alăturată:

- p_1 : Podul pare nesfârșit, ne putem imagina că este o dreaptă d .
- p_2 : Apa este liniștită; ne putem imagina că se prelungește în toate direcțiile, deci că este un plan α .
- p_3 : Podul delimitează două zone ale apei; o zonă este situată de o parte a podului, iar a doua zonă este situată de cealaltă parte a podului.
- p_4 : Punctele A și B sunt de aceeași parte a podului. Punctele C și D sunt de aceeași parte a podului. Pentru a ajunge de la un punct la altul, în linie dreaptă, nu trebuie să traversăm podul.
- p_5 : Punctele A și C sau A și D sau B și C , sau B și D sunt de o parte și de alta a podului. Pentru a ajunge de la unul la altul, în linie dreaptă, trebuie să traversăm podul.



Concluzie: Punctele planului α în care se găsește dreapta d sunt grupate în două porțiuni de plan, delimitate de dreapta d .

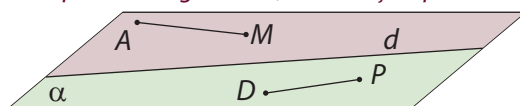
Considerăm în planul α dreapta d și punctele A și D , situate de o parte și de alta a dreptei d .

SEMIPLANUL

Toate punctele M din plan, situate de aceeași parte a dreptei d ca și punctul A , formează semiplanul mărginit de dreapta d , care conține punctul A .

Toate punctele P din plan, situate de aceeași parte a dreptei d ca și punctul D , formează semiplanul mărginit de dreapta d , care conține punctul D .

Semiplanul mărginit de d , care conține punctul A .



Semiplanul mărginit de d , care conține punctul D .

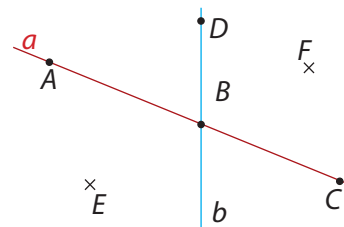


Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Aplicație

Într-un plan, considerăm dreptele a, b și punctele A, B, C, D, E, F , ca în imaginea alăturată. Se știe că punctele E, B, F sunt coliniare.

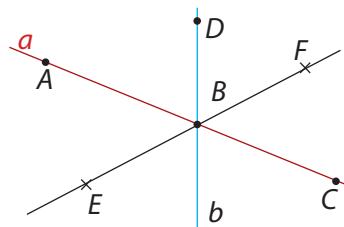
- Reprezentați pe caiete, folosind rigla, configurația dată, apoi trasați dreapta EF .
- Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, stabiliți dacă este adevărat sau este fals.



- E_1 : Punctul A este situat pe semidreapta CB .
- E_2 : Semidreptele EB și EF au puncte comune.
- E_3 : Se pot reprezenta două semidrepte cu originea F , care să conțină punctul B .
- E_4 : Semidreptele AB și AC sunt diferite.
- E_5 : Semidreptele BA și BC nu sunt semidrepte opuse.
- E_6 : Segmentele AC și EF nu au puncte comune.
- E_7 : Pe dreapta a , sunt reprezentate trei segmente.
- E_8 : Punctele C și A sunt de aceeași parte a dreptei EF .
- E_9 : Punctele E și F sunt de o parte și de alta atât pentru dreapta a , cât și pentru dreapta b .
- E_{10} : Punctul F este situat în semiplanul delimitat de dreapta b , care conține punctul C .

Soluție.

- Desenul alăturat.
- E_1 – adevărat: A și B sunt situate pe dreapta a , de aceeași parte a punctului C .
 - E_2 – adevărat: Semidreptele EB și EF sunt identice.
 - E_3 – fals: FB este singura semidreaptă cu originea F , care conține punctul B .
 - E_4 – fals: AB și AC au aceeași origine, iar C este situat pe semidreapta AB .
 - E_5 – fals: Semidreptele BA și BC au aceeași origine, iar originea B este între A și C , deci semidreptele BA și BC sunt opuse.
 - E_6 – fals: Punctul B se află atât pe segmentul AC , cât și pe EF .
 - E_7 – adevărat: Sunt reprezentate segmentele AB, AC, BC .
 - E_8 – fals: Pentru a junge de la A la C , în linie dreaptă, traversăm dreapta EF , deci A și C sunt de o parte și de alta a dreptei EF .
 - E_9 – adevărat: E și F sunt în semiplanele diferite delimitate de a și în semiplanele diferite delimitate de b .
 - E_{10} – adevărat: Punctele C și F sunt de aceeași parte a dreptei b , deci sunt situate în același semiplan delimitat de dreapta b .





Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



1. Observați figura de mai jos.

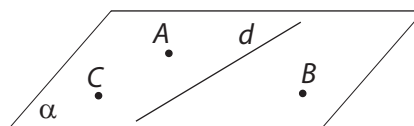


Numiți:

- puncte ale dreptei d , situate pe semidreapta BC ;
 - puncte ale dreptei d , situate de o parte și de alta a punctului C .
2. a) Desenați punctele distincte A, B și dreapta AB .
b) Reprezentați punctele distincte E și F pe dreapta AB , astfel încât E să fie între A și B , iar B să fie între E și F .
c) În configurația de la b), evidențiați cu verde segmentul EF .
d) În configurația de la c), reprezentați semidreapta EF , folosind culoarea preferată.
3. Desenați punctele necoliniare M, N, P , apoi segmentele MN, NP, MP .
4. Desenați un plan α , o dreaptă d conținută de planul α și punctul A al planului α , în exteriorul dreptei d .
a) Colorați cu albastru punctele semiplanului delimitat de dreapta d , în care se află punctul A .
b) Colorați cu galben punctele planului care nu sunt de aceeași parte cu punctul A față de dreapta d .
5. Fie punctele A, B, C, D situate pe dreapta d , în această ordine. Numiți:
a) semidreptele cu originea în punctul C ;
b) două semidrepte identice;
c) două semidrepte care au originea comună, dar nu sunt identice.

6. Desenați o dreaptă și un segment astfel încât:

- toate punctele segmentului să fie și puncte ale drepte;
 - dreapta și segmentul să aibă un singur punct comun;
 - dreapta și segmentul să nu aibă puncte comune.
7. Observați figura de mai jos, copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera **A**, dacă propoziția este adevărată, și litera **F**, dacă propoziția este falsă.

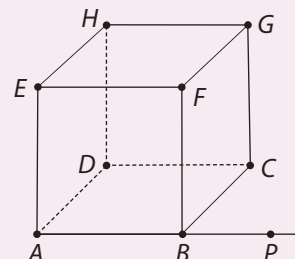


Propoziția	A/F
a) Dreapta d delimitează două semiplane ale planului α .	
b) Punctul A este situat în semiplanul delimitat de dreapta d , care conține punctul C .	
c) Punctul B nu este situat în semiplanul delimitat de dreapta d , care conține punctul A .	
d) Punctul C nu este situat în semiplanul delimitat de dreapta d , care conține punctul A .	
e) Semiplanul delimitat de dreapta d , care conține punctul C și semiplanul delimitat de d , care conține punctul A sunt identice.	
f) Dreapta AB nu are puncte în semiplanul delimitat de dreapta d , care conține punctul C .	



Minitest

1. În desenul alăturat, este reprezentat un cub și semidreapta BP . Știind că punctele A, B, P sunt coliniare, numiți:
- semidrepte cu originea în punctul B ;
 - segmente care conțin punctul H și un alt vârf al cubului;
 - segmente reprezentate care au un capăt în punctul A ;
 - un semiplan care conține punctele C și P .
2. Punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, iar punctele B, C, D sunt necoliniare.
- Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
 - Completați desenul cu segmentele DA, DB, DC .
 - Arătați că semidreptele AB și DC au un punct comun.



Se acordă 10 puncte din oficiu.

L4 Poziții relative a două drepte



Ne amintim

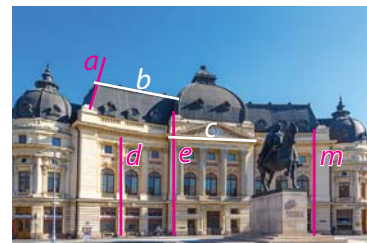
Prin oricare două puncte distincte trece o singură dreaptă.

Două drepte d_1 și d_2 pot avea toate punctele comune (dreptele coincid) și spunem că dreptele sunt *identice* sau *confundate*.

Două drepte d_1 și d_2 care nu sunt identice sunt drepte *distincte* (*diferite*).

Observând imaginea alăturată, *intuitiv*, putem stabili că:

1. Dreptele a și b au *exact un punct comun*.
2. Dreptele a și c *nu au puncte comune*.
3. Dreapta d nu are puncte comune cu nicio altă dreaptă dintre cele reprezentate.
4. Oricum am lua două dintre dreptele d, e, m , acestea nu au puncte comune.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Poziția relativă pe care două drepte o au una față de alta este dată de numărul punctelor pe care cele două drepte le au în comun.

Pentru două drepte dintr-un plan, sunt posibile situațiile:

	Drepte <i>identice</i> sau <i>confundate</i>	Drepte <i>concurente</i> sau <i>secante</i>	Drepte <i>paralele</i>
Descriere	Două drepte care au toate punctele comune se numesc <i>drepte identice</i> .	Două drepte care au <i>un singur punct comun</i> se numesc <i>drepte concurente sau secante</i> . <i>Observație.</i> Punctul lor comun se numește <i>punctul de intersecție</i> a dreptelor.	Două drepte dintr-un plan care <i>nu au niciun punct comun</i> se numesc <i>drepte paralele</i> .
Reprezentare			



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni



Lucrare practică 1: Tehnică de reprezentare, prin desen, a două *drepte paralele*.

Materiale necesare: caietul de matematică, rigla, echerul, un creion ascuțit.

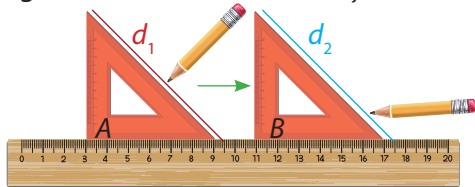
Etapele de realizare a construcției:

Pasul 1. Fixăm rigla, apoi așezăm echerul în poziția A, sprijinit pe riglă.

Pasul 2. Trasăm dreapta d_1 .

Pasul 3. Pe rigla nemișcată, deplasăm echerul, sprijinit pe riglă, în poziția B.

Pasul 4. Trasăm dreapta d_2 .
Am obținut dreptele paralele d_1 și d_2 .

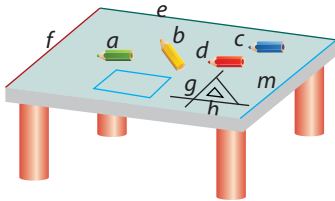


Observație. Dacă dorim să verificăm paralelismul a două drepte dintr-o configurație dată, putem folosi rigla și echerul, ca mai sus.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Pe masa de lucru sunt așezate un caiet, creioane și un echer, ca mai jos. Observați cu atenție desenul, imaginați-vă creioanele și laturile echerului ca porțiuni de drepte și completați spațiile libere, precizând poziția dreptelor numite.



P_1 : Dreptele a și b sunt ...

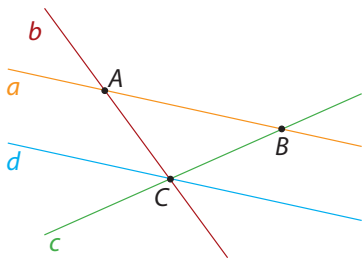
P_2 : Dreptele c și d sunt ...

P_3 : Dreptele e și f sunt ...

P_4 : Dreptele g și h sunt ...

P_5 : Dreptele f și m sunt ...

2. Observați configurația următoare.



Copiați tabelul pe caiete și completați în caseta liberă litera **A**, dacă propoziția este adevărată, și litera **F**, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Dreptele a și AB sunt drepte identice.	
p_2 : Dreptele b și d sunt drepte concurente.	
p_3 : Dreapta a este paralelă cu dreapta c .	
p_4 : Dreptele a și d au un punct comun.	

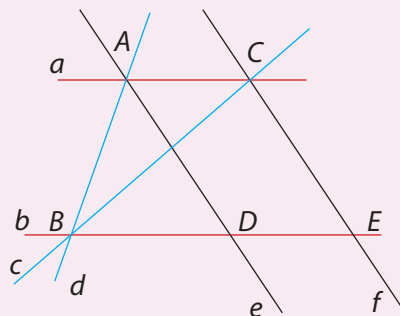


Minitest

Folosiți rigla și echerul pentru a stabili poziția dreptelor reprezentate, apoi asociați fiecărei litere care identifică un grup de drepte, reprezentate în coloana **A**, cifra scrisă în coloana **B**, corespunzătoare poziției lor. Scrieți pe caiet asocierile făcute.

Pentru asocierile corecte:

- a.**, **b.**, **c.** - câte 20 de puncte,
d. - 30 de puncte



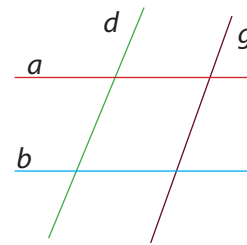
A	B
a. a, d, e	1. drepte identice
b. CE, f	2. drepte paralele
c. b, c, d	3. drepte concurente în punctul A
d. AC, BD	4. drepte concurente în punctul B
	5. drepte concurente în punctul C

Se acordă 10 puncte din oficiu.

3. Construiți cu rigla și echerul:

- a)** trei drepte concurente;
b) trei drepte distincte, paralele două câte două;
c) trei drepte distincte, dintre care doar două sunt paralele;
d) trei drepte, două câte două concurente, care nu au un punct comun.

4. Observați desenul, folosiți echerul și rigla pentru a stabili pozițiile dreptelor reprezentate, apoi scrieți:

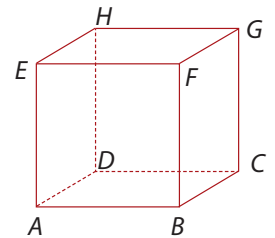


- a)** o dreaptă paralelă cu dreapta a ;
b) o dreaptă concurentă cu dreapta b ;
c) o dreaptă paralelă cu dreapta d ;
d) o dreaptă concurentă cu dreapta g .

5. Observați cubul din desen.

Scrieți:

- a)** două drepte concurente în punctul C;
b) toate dreptele reprezentate, care conțin punctul B;
c) două drepte, fiecare paralelă cu dreapta HD ;
d) o dreaptă paralelă cu dreapta FG ;
e) toate dreptele care conțin punctul A și un alt vârf al cubului.

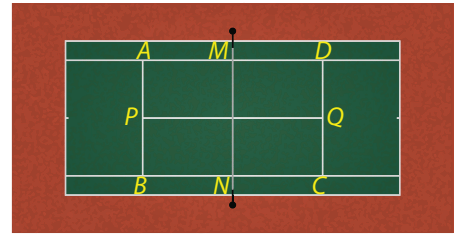


6. Desenați o dreaptă d și A, B, C puncte exterioare ei astfel încât AB este paralelă cu d și BC este paralelă cu d . Precizați poziția dreptelor AB și BC .

L5 Distanța dintre două puncte; lungimea unui segment. Segmente congruente

Imaginea alăturată reprezintă un teren de tenis, văzut de sus. Am evidențiat pe desen câteva elemente cu ajutorul cărora vom caracteriza ceea ce vedem. Stabilim vizual că:

1. Sunt *coliniare* tripletele de puncte: A, M, D ; A, P, B ; B, N, C și C, Q, D .
2. Punctele A și B sunt *egal depărtate* de P . Punctul M este la aceeași *distanță* de A și D . Punctele D și C sunt la aceeași *distanță* de Q . Punctul N este la *jumătatea* distanței dintre B și C .
3. *Distanța* dintre A și D este egală cu *distanța* dintre B și C . *Distanța* dintre A și B este egală cu *distanța* dintre D și C .
4. *Lungimea* fileului este aproximativ egală cu *lățimea* terenului.



Știați că ... ?

Suprafața de joc a terenului de tenis este un dreptunghi cu lungimea de 23,78 m. Pentru jocul de simplu, lățimea este 8,23 m.

În caracterizarea de mai sus au fost folosiți mai mulți *termeni* cu care am *identificat* modele matematice ale realității.



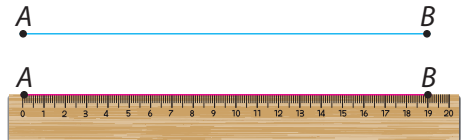
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Unitățile de măsură pentru lungimi sunt cunoscute din clasele anterioare, unitatea principală fiind *metrul*.

Pentru realizarea configurațiilor geometrice, vom folosi, de regulă, doi dintre submultiplii metrului: *centimetrul* și *milimetrul*, unități evidențiate prin diviziunile pe care le putem citi pe o *riglă gradată*.

Riglă gradată este *instrumentul geometric* pe care îl vom folosi pentru a măsura lungimi mici.

Considerăm punctele distincte A și B . Acestea determină *segmentul* AB .



Fixăm rigla cu gradația 0 în dreptul unuia dintre capete (fie acesta A) și citim gradația indicată de riglă, în dreptul celuilalt capăt (în cazul nostru, B).

Cum, pe riglă, distanța dintre două puncte având coordonate numere naturale consecutive este 1 cm, iar punctul B corespunde gradației 19, deducem că:

1. *Distanța* de la A la B este de 19 cm și notăm $AB = 19$ cm.
2. *Lungimea segmentului* AB este de 19 cm și scriem, de asemenea, $AB = 19$ cm.

Observație. Folosim notația AB pentru: segmentul AB , lungimea segmentului AB și distanța dintre punctele A și B . Din context, vom ști despre care dintre acestea este vorba.

Concluzie. Lungimea unui segment, exprimată într-o unitate de măsură dată, este *numărul unităților de măsură* (nu neapărat natural) care se cuprind în segmentul respectiv.



Reținem

Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, atunci între lungimile segmentelor AB, BC, AC are loc relația: $AC = AB + BC$.

Dacă între lungimile segmentelor AB, BC, AC are loc relația: $AC = AB + BC$, atunci punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Construcția unui segment de o lungime dată

Considerăm dat un punct A , situat pe dreapta d . Ne propunem să reprezentăm, pe dreapta d , punctul B astfel încât $AB = 7$ cm.

Construcția cu rigla gradată

Dacă folosim doar rigla gradată, fixăm diviziunea 0 în punctul A al dreptei, suprapunem marginea riglei pe dreapta d , identificăm gradația 7 pe riglă, apoi marcăm pe dreaptă punctul B corespunzător acestei gradații.

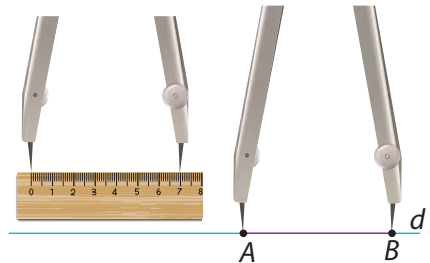
Construcția cu rigla gradată și compasul

Dacă folosim rigla gradată și compasul, procedăm astfel:

Pasul 1. Identificăm pe riglă gradația 7.

Pasul 2. Deschidem compasul cu un vârf în dreptul gradației 0 și cu celălalt vârf în dreptul gradației 7, găsită anterior.

Pasul 3. Fără a modifica deschiderea compasului, fixăm acul compasului în punctul A , iar cu celălalt vârf marcăm punctul B pe dreaptă. Am obținut segmentul AB , cu lungimea egală cu 7 cm.



Aplicație

- Construiți punctele coliniare A, B, C astfel încât $AB = 30$ mm și $BC = 10$ mm.
- Pentru fiecare din cazurile întâlnite la subpunctul a), calculați lungimea segmentului AC .
- Verificați, folosind rigla gradată, rezultatele găsite.

Soluție.

a) Sunt posibile două situații:



- Dacă punctul B este între A și C , atunci $AC = AB + BC$, deci $AC = 30 + 10 = 40$ (mm). Dacă punctul C este între A și B , atunci $AC = AB - BC$, deci $AC = 30 - 10 = 20$ (mm).
- Se măsoară segmentul AC cu rigla gradată, pentru fiecare caz.



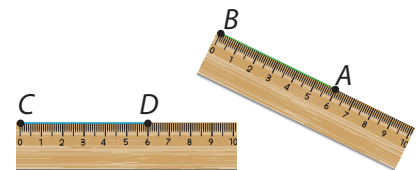
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Segmente congruente

Două segmente, AB și CD , care prin suprapunere coincid, se numesc *segmente congruente*.

Scriem $AB \equiv CD$ și citim: segmentul AB este *congruent* cu segmentul CD (sau simplu: AB congruent cu CD).

Imaginile care ilustrează lungimea unui segment, respectiv construcția unui segment de lungime dată, conduc la următoarea caracterizare a segmentelor congruente.



Dacă două segmente AB și CD sunt congruente ($AB \equiv CD$), atunci ele au aceeași lungime ($AB = CD$).
Dacă două segmente au aceeași lungime ($AB = CD$), atunci acestea sunt congruente ($AB \equiv CD$).



Reținem

- $AB \equiv AB$, oricare ar fi segmentul AB . (Orice segment este congruent cu el însuși.)
- Dacă $AB \equiv CD$, atunci $CD \equiv AB$.
- Dacă $AB \equiv CD$ și $CD \equiv EF$, atunci $AB \equiv EF$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Construcția unui segment congruent cu un segment dat

Se consideră cunoscut segmentul AB și dorim să construim un segment CD astfel încât $AB \equiv CD$.

Construcția cu rigla gradată

Dacă folosim doar rigla gradată, măsurăm segmentul AB , apoi construim segmentul CD cu lungimea aflată, urmând tehnica învățată.

Construcția cu rigla negradată și compasul

Dacă nu dispunem de o riglă gradată, vom face această construcție cu compasul și o riglă negradată.

Lucrare practică 2: Construcția unui segment congruent cu un segment dat.

Materiale necesare:

- caietul de matematică;
- un compas;
- o riglă negradată;
- un creion ascuțit.

Etapele de realizare a construcției:

Pasul 1. Poziționăm compasul cu cele două vârfuri în punctele A și B . Evident, *distanța dintre vârfuri este egală cu lungimea segmentului AB .*

Pasul 2. Identificăm unul din capetele segmentului, punctul C .

Pasul 3. Fără a modifica distanța dintre cele două vârfuri ale compasului, poziționăm acul compasului în punctul C , iar cu vârful-creion descriem un arc de cerc.

Dacă D este un punct oarecare situat pe arcul descris, atunci segmentele AB și CD au aceeași lungime, deci $AB \equiv CD$.

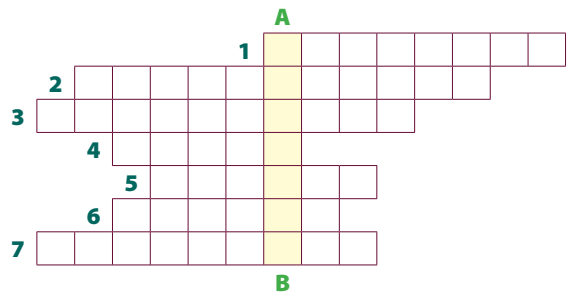


Matematică prin joc

Completați careul.

1. Lungimea segmentului MN reprezintă ... de la punctul M la punctul N .
2. Porțiunea de dreaptă mărginită la un capăt de un punct P se numește ... cu originea în P .
3. Două segmente care au aceeași lungime sunt ...
4. Poate fi gradată sau negradată.
5. Instrument cu ajutorul căruia poate fi construit un cerc.
6. Pot fi coliniare.
7. Trei sau mai multe puncte care se află pe o dreaptă.

Formulați un enunț adevărat care să cuprindă cuvântul găsit pe verticala **AB**.



Temă de portofoliu

Avem la dispoziție **trei segmente** cu lungimile: 2 cm, 6 cm, respectiv 9 cm.

Folosind **rigla negradată, compasul și cele trei lungimi**, construiți segmentul MN , cu $MN = 4$ cm, și segmentul PQ , cu $PQ = 23$ cm.

Indicație. $4 \text{ cm} = 6 \text{ cm} - 2 \text{ cm}$, iar $23 \text{ cm} = 2 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 9 \text{ cm}$.

Consultați manualul digital pentru a descoperi construcții similare.



1. Desenați trei puncte coliniare A, B, C , în această ordine, cu $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm.

a) Măsurați distanța dintre punctele A și C .

b) Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

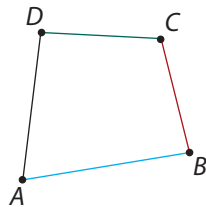
$$p_1: AB + BC = AC;$$

$$p_2: BA + AC = BC;$$

$$p_3: AC - CB = AB.$$

2. Măsurați cu ajutorul riglei gradate dimensiunile unei pagini a caietului de matematică și completați, pe caiete, spațiile libere: $L = \dots$ cm, $l = \dots$ cm, unde L este lungimea, iar l este lățimea paginii.

3. În desenul alăturat, sunt reprezentate punctele A, B, C, D , oricare trei necoliniare și segmentele AB, BC, CD, DA .



a) Măsurați cu ajutorul riglei gradate lungimile segmentelor și completați, pe caiete, spațiile punctate, cu rezultatele măsurării.

$$AB = \dots \text{ mm}$$

$$BC = \dots \text{ mm}$$

$$CD = \dots \text{ mm}$$

$$DA = \dots \text{ mm}$$

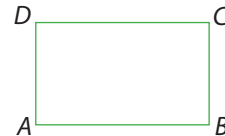
b) Scrieți lungimile segmentelor AB, BC, CD, DA , în ordine crescătoare.

4. Desenați trei puncte necoliniare D, E, F așa încât $EF = 3,4$ cm, $FG = 4,6$ cm.

a) Măsurați cu rigla gradată distanța dintre punctele E și G .

b) Precizați dacă propoziția $EF + FG > EG$ este adevărată sau este falsă.

5. Mircea desenează un dreptunghi și notează vârfurile acestuia cu A, B, C, D . Lungimea dreptunghiului este de 6 cm, iar lățimea este de 4 cm. Copiați tabelul pe caiete și scrieți în casetele libere litera **A**, dacă propoziția este adevărată, și litera **F**, dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F
a_1 : Segmentele AB și CD sunt congruente.	
a_2 : Segmentele AB și AD nu sunt congruente.	
a_3 : Segmentele BC și AD au aceeași lungime.	

6. Desenați punctele coliniare M, N, P , în această ordine, cu $MN = 4,5$ cm, $MP = 9$ cm. Arătați că segmentele MN și NP sunt congruente.

7. Reprezentați pe axa numerelor cu originea O , alegând ca unitate de măsură centimetrul, punctele $A(2), B(5), C(7)$.

a) Calculați distanța dintre punctele A și C .

b) Calculați distanța dintre punctele B și C .

c) Precizați dacă printre segmentele determinate de câte două dintre punctele O, A, B, C există segmente congruente.

d) Verificați dacă $OA + OB + OC = AB + BC + CA$.



Minitest

1. Punctele O, A, B aparțin dreptei d astfel încât distanța între A și O este 5 cm, iar distanța între B și O este de 3 cm.

(20 p) a) Realizați un desen care să ilustreze cele afirmate mai sus. Luați în calcul toate situațiile posibile.

(20 p) b) Calculați lungimea segmentului AB , în fiecare situație identificată.

2.

(20 p) a) Desenați un segment AB cu lungimea 10 cm. Reprezentați punctul P în interiorul segmentului

AB , astfel încât $AP = \frac{2}{5} \cdot AB$, apoi reprezentați în interiorul segmentului BP punctul Q , astfel încât $PQ = 2,5$ cm.

(30 p) b) Calculați lungimile segmentelor AP, AQ și BQ .

Se acordă 10 puncte din oficiu.

L6 Mijlocul unui segment

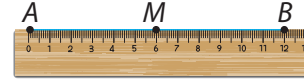


Descoperim, înțelegem, exemplificăm



Fie AB un segment. *Mijlocul* segmentului AB este punctul M , situat pe segmentul AB , la distanță egală de capetele lui ($AM = MB$).
Punctul M , situat pe segmentul AB , este mijlocul acestuia dacă și numai dacă $AM = MB$.

Dacă $AB = 12$ cm și M este mijlocul segmentului AB , atunci $AM = MB = 6$ cm.



Construcția mijlocului unui segment

Construcția cu rigla gradată

Dacă folosim doar rigla gradată, ne bazăm pe *cunoașterea lungimii* segmentului și pe faptul că $AM = MB = AB : 2$. Prin urmare, măsurăm de la unul din capete un segment de lungime $AB : 2$, suprapus pe segmentul dat și marcăm punctul M .

Consultați manualul digital pentru a afla tehnica de construcție a mijlocului unui segment oarecare, folosind rigla negradată și compasul.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

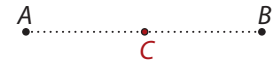
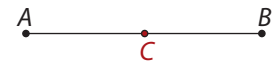


Simetricul unui punct față de alt punct

Notăm cu C mijlocul segmentului AB . Atunci, punctele A, C, B sunt coliniare și $AC = CB$.

Vom spune că:

- punctul B este simetricul punctului A față de punctul C .
- punctul A este simetricul punctului B față de punctul C .
- punctele A și B sunt simetrice față de punctul C .



Observație. Îndoind segmentul AB după punctul C , punctele A și B se vor suprapune.

Construcția simetricului unui punct față de alt punct

a) Construcția folosind doar rigla gradată

Măsurăm pe dreapta AC segmentul CB congruent cu AC , astfel încât C să fie între A și B . Punctul B este simetricul lui A față de C .

b) Construcția folosind rigla negradată și compasul

Lucrarea practică 3: Construcția simetricului unui punct față de alt punct

Materiale necesare: *Etapile de realizare a construcției:*

- caietul de matematică;
- un compas;
- o riglă negradată;
- un creion ascuțit.

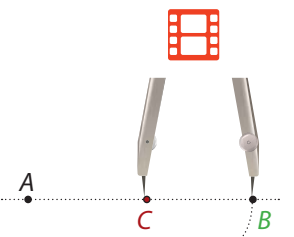
Pasul 1. Sunt date punctele A și C .



Pasul 2. Cu ajutorul riglei, trasați dreapta AC .



Pasul 3. Fixați acul compasului în punctul C , apoi luați în deschiderea compasului segmentul AC . Cu această deschidere, trasați un arc de cerc așa încât să intersecteze dreapta AC într-un al doilea punct, pe care îl notați cu B și care va fi simetricul lui A față de C .





1. Copiați tabelul de mai jos pe caiete, apoi completați în caseta liberă **A**, dacă propoziția este adevărată, sau **F**, dacă propoziția este falsă.

Propoziția	A/F
p_1 : Punctul interior unui segment, situat la aceeași distanță față de capetele acestuia, se numește mijlocul segmentului.	
p_2 : Capetele unui segment și mijlocul segmentului sunt puncte coliniare.	
p_3 : Dacă un punct se află la aceeași distanță față de capetele unui segment atunci acesta este mijlocul segmentului.	

2. În figura de mai jos, punctul M este mijlocul segmentului AB . Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.



- a) Dacă $AB = 16$ cm, atunci AM are lungimea:
- A.** 12 cm; **B.** 8 cm;
C. 16 cm; **D.** 4 cm.
- b) Dacă $BM = 6,25$ cm, atunci AB are lungimea:
- A.** 12 cm; **B.** 6,25 cm;
C. 12,5 cm; **D.** 6,5 cm.
3. Fie punctele coliniare M, N, P , în această ordine, cu $MN = 5,6$ cm, $NP = 7,4$ cm și fie A și B mijloacele segmentelor MN , respectiv NP . Calculați lungimea segmentului AB .
4. Pe dreapta d , se consideră punctele A și B , astfel încât $AB = a$ cm.
- a) Construiți cu rigla gradată punctul C , simetricul punctului A față de punctul B , pentru $a = 3$ cm.
- b) Calculați lungimea segmentului AC , folosind subpunctul a).
- c) Construiți cu compasul punctul D , simetricul punctului B față de punctul A , pentru $a = 2$ cm.
- d) Calculați lungimea segmentului AD folosind subpunctul c).

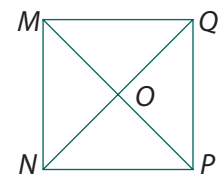
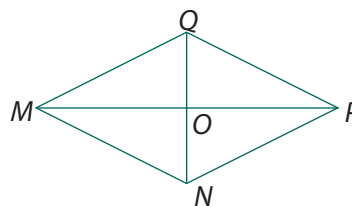
5. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

Punctele A, B, C, D, E, F sunt coliniare, în această ordine și $AB = BC = CD = DE = EF = 3$ cm.

- a) Simetricul punctului A față de punctul C este:
- A.** punctul E ; **B.** punctul B ;
C. punctul D ; **D.** punctul F .
- b) Simetricul punctului E față de punctul D este:
- A.** punctul A ; **B.** punctul B ;
C. punctul F ; **D.** punctul C .
6. În figura următoare, punctele A, B, C, D sunt coliniare, în această ordine, $AD = 18$ cm, $BC = 7$ cm, iar D este simetricul punctului B față de punctul C . Determinați lungimile segmentelor CD și AB .



7. Pe o dreaptă d , se consideră punctele A și B cu $AB = 4,2$ cm, C simetricul punctului A față de punctul B și M mijlocul segmentului BC .
- a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
- b) Calculați lungimile segmentelor BC, AC, CM, AM .
8. Reprezentați pe axa numerelor, cu originea O , punctele A și B , corespunzătoare numerelor naturale 3, respectiv 4. Determinați:
- a) coordonata punctului P , simetricul punctului O față de punctul A .
- b) coordonata punctului Q , simetricul punctului P față de punctul B .
- c) lungimea segmentului PQ , unde P și Q sunt punctele construite la subpunctele a) și b).
9. Verificați, prin măsurare pentru fiecare figură, dacă:



- a) M și P sunt simetrice față de O ;
b) N și Q sunt simetrice față de O .



Minitest

1. Punctele A, B sunt situate pe o dreaptă d , $AB = 4$ cm, iar punctul C este exterior dreptei d .
- (10 p) a) Construiți cu rigla gradată sau cu compasul, punctul S , simetricul punctului A față de punctul B .
- (10 p) b) Calculați lungimile segmentelor BS și AS .
- (20 p) c) Construiți punctul D , simetricul punctului A față de punctul C .
2. Se consideră punctele A, B, C, D coliniare în această ordine, cu $AB = 3,4$ cm, $BD = 3 \cdot AB$ și C mijlocul segmentului BD .
- (20 p) a) Realizați un desen conform datelor problemei.
- (30 p) b) Calculați lungimile segmentelor BD, CD, AC .

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Realizați un desen care să conțină următoarele figuri geometrice:

- (5p) 1. dreptele a, b, c , concurente în punctul P ;
- (5p) 2. punctul A , situat pe dreapta a , $A \neq P$;
- (5p) 3. punctele coliniare A, P, B , în această ordine;
- (5p) 4. punctul M , situat pe dreapta b și în semiplanul delimitat de dreapta c care conține punctul A ;
- (5p) 5. punctul N , situat pe dreapta c și în semiplanul delimitat de dreapta b care nu conține punctul A .

II. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Prin două puncte distincte se pot trasa:
- A. două drepte distincte; B. o singură dreaptă; C. oricât de multe drepte distincte.
- (5p) 2. Două drepte care au un singur punct comun sunt:
- A. paralele; B. identice; C. concurente.
- (5p) 3. Punctul M este mijlocul segmentului AB . Două semidrepte opuse sunt:
- A. MB și MA ; B. BA și BM ; C. AB și AM .

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1. Pe caietele lor de matematică, Raul desenează punctele A, B, C coliniare în această ordine, cu $AB = 4$ cm, $AC = 11$ cm, iar Monica desenează punctele D, E, F coliniare, cu $DE = 13$ cm, $EF = 6$ cm. Cei doi calculează lungimi de segmente și obțin rezultate corecte. Se cer:
- (10p) a) rezultatul găsit de Raul pentru lungimea segmentului BC ;
- (10p) b) rezultatul găsit de Monica pentru lungimea segmentului DF .
2. Pe segmentul PQ de lungime 20 cm se iau punctele A, B astfel încât $AP = \frac{2}{5} \cdot PQ$ și $BQ = 4$ cm.
- (10p) a) Aflați lungimile segmentelor AP și AQ .
- (5p) b) Realizați un desen, respectând datele problemei.
- (5p) c) Arătați că $AB \equiv AP$.
- (10p) d) Fie S simetricul punctului Q față de punctul B . Calculați distanța dintre punctele P și S .

Se acordă 10 puncte din oficiu.



2 UNGHIURI

L1 Definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi



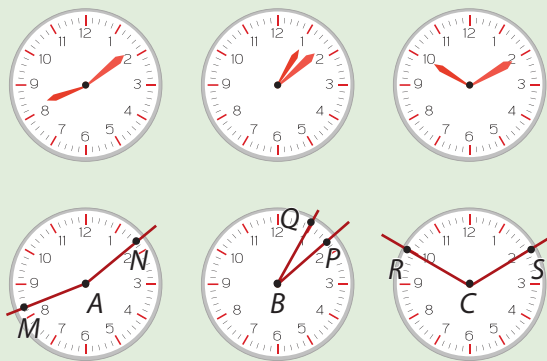
Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Orarul și minutarul unui ceas de perete sugerează o *configurație geometrică* formată din două segmente care au comun un capăt. Ne putem imagina semidreptele cu *originea în centrul cadranelui*, deci comună, care sunt suport pentru limbile ceasului.

Numim *unghi* figura geometrică formată din două *semidrepte* care au *originea comună*.

Cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*, iar originea lor comună se numește *vârful unghiului*.

În imaginea dată sunt evidențiate: unghiul cu vârful *A* și laturile *AM* și *AN*, unghiul cu vârful *B* și laturile *BP* și *BQ* și unghiul cu vârful *C* și laturile *CR* și *CS*.



Pentru unghiul determinat de semidreptele *OA* și *OB*, folosim una dintre notațiile:

$\sphericalangle AOB$ sau \widehat{AOB} sau $\sphericalangle BOA$ sau \widehat{BOA}

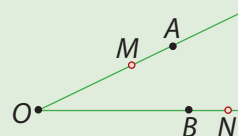
Dacă nu sunt reprezentate mai multe unghiuri cu vârful *O*, atunci se poate scrie și $\sphericalangle O$ sau \widehat{O} .

Desen	Notație	Citire
	$\sphericalangle AOB$ sau \widehat{AOB} $\sphericalangle BOA$ sau \widehat{BOA} $\sphericalangle O$ sau \widehat{O} .	unghiul <i>AOB</i> unghiul <i>BOA</i> unghiul <i>O</i>



Reținem

- Identificarea unui unghi constă în precizarea vârfului unghiului și precizarea a două puncte, altele decât vârful, fiecare pe câte o latură a unghiului.
- În scrierea sau citirea unui unghi folosind trei puncte, vârful unghiului este întotdeauna pe poziția a doua.
- Dacă punctul *M* este situat pe latura *OA*, iar punctul *N* este situat pe latura *OB*, atunci unghiul *AOB* este identic (același) cu unghiul *MON*.



Unghiul din imagine poate fi scris cu trei litere în oricare dintre formele: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOA$, $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOM$, $\sphericalangle MOB$, $\sphericalangle BOM$, $\sphericalangle AON$, $\sphericalangle NOA$.

În fiecare formă, litera *O*, care numește vârful unghiului este la mijloc.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Cele două laturi ale unui unghi delimitează două zone ale planului: *interiorul unghiului* și *exteriorul unghiului*.

Două laturi ale terenului pe care Andrei și Vlad joacă fotbal formează unghiul din imagine. Când Andrei întreabă unde este mingea, Vlad îi spune imediat că este în *interiorul unghiului*.



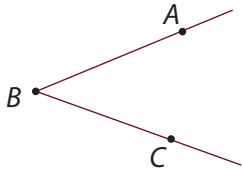
Interiorul unghiului cuprinde toate punctele care se află atât în semiplanul determinat de latura *d*₁, care conține punctul în care se află mingea, cât și în semiplanul determinat de latura *d*₂, care conține punctul în care se află mingea.

Elementul	Reprezentare	Descriere
Interiorul unghiului		Interiorul unghiului ABC este format din toate punctele care se află atât în semiplanul delimitat de AB care conține punctul C , cât și în semiplanul delimitat de BC care conține punctul A (este format din punctele comune ale celor două semiplane)
Exteriorul unghiului		Exteriorul unghiului este format din toate punctele care sunt situate în <i>cel mult unul</i> dintre: semiplanul delimitat de AB care conține punctul C și semiplanului delimitat de BC care conține punctul A .

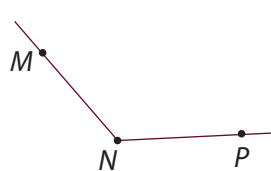


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

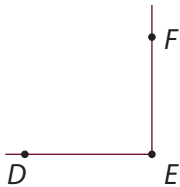
1. a) Citiți și scrieți, folosind notații potrivite, unghiurile din figura alăturată.



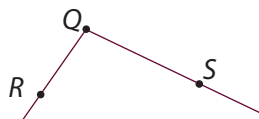
a)



b)

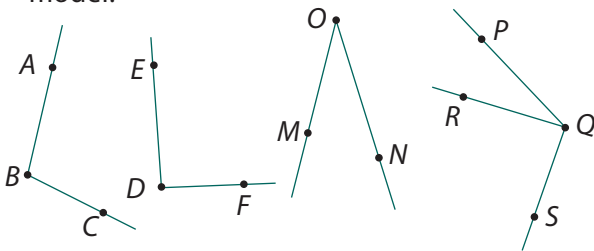


c)



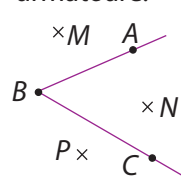
d)

- b) Pentru fiecare unghi de la subpunctul a), precizați vârful și laturile.
2. Copiați pe caiet tabelul și completați casetele libere, pentru fiecare unghi din desen, după model:

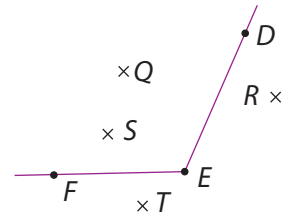


Unghiul	Vârful	Laturile
$\sphericalangle ABC$	B	BA, BC
...		

3. Observați cele două configurații din imaginea următoare.



a)



b)

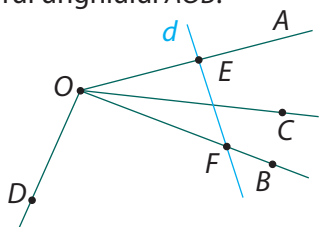
- a₁) Identificați și scrieți punctele reprezentate în configurația a), în interiorul unghiului ABC .
- a₂) Identificați și scrieți punctele reprezentate în configurația a), în exteriorul unghiului ABC .
- b₁) Identificați și scrieți punctele reprezentate în configurația b), în interiorul unghiului DEF .
- b₂) Identificați și scrieți punctele reprezentate în configurația b), în exteriorul unghiului DEF .
4. Desenați unghiul ABC și punctele: D și E aparținând unghiului, M și N în interiorul unghiului, P și Q în exteriorul unghiului.
5. Desenați: a) unghiurile AOB și COD astfel încât să aibă puncte interioare comune; b) unghiurile MNP și PNQ astfel încât să nu aibă puncte interioare comune; c) semidreptele OA , OB , OC , astfel încât interioarele unghiurilor care se pot forma, având ca laturi oricare două dintre aceste semidrepte, să nu aibă puncte comune.



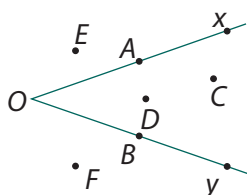
Dicționar

configurație geometrică = ansamblu de figuri geometrice

6. Observați următoarea configurație geometrică și argumentați afirmațiile:
- Semidreapta OC are toate punctele în interiorul unghiului AOB .
 - Unghiurile AOB, EOF, AOF, EOB sunt identice.
 - Semidreapta OD are toate punctele în exteriorul unghiului AOB .
 - Punctele dreptei d , situate între E și F se află în interiorul unghiului AOB .



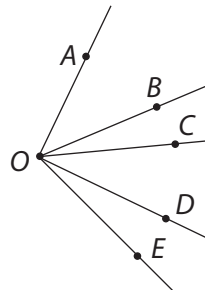
7. Se consideră unghiul din figura următoare.



- Analizați și scrieți în câte moduri putem citi unghiul din figură.
 - Scrieți punctele care aparțin unghiului.
 - Scrieți punctele interioare unghiului.
 - Scrieți punctele exterioare unghiului.
8. Alexandru desenează punctele necoliniare A, B, C și semidreapta CD situată în exteriorul unghiului BAC .
- Scrieți, folosind notații potrivite, unghiurile desenate de Alexandru.
 - Identificați și scrieți vârful și laturile fiecărui unghi.

Alexandru spune că în desenul realizat există două unghiuri care au o latură comună. Precizați, justificând răspunsul dat, dacă Alexandru are dreptate.

9. Observați desenul următor și completați în casetă litera **A**, dacă propoziția este adevărată și litera **F**, dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F
p_1 : În desen sunt reprezentate exact cinci unghiuri cu vârful O .	
p_2 : Semidreapta OC este latură pentru patru dintre unghiurile reprezentate.	
p_3 : Punctul B este situat în interiorul unghiului AOC .	
p_4 : Punctele A, B, E sunt situate în exteriorul unghiului COD .	
p_5 : Interioarele unghiurilor AOB și DOE nu au puncte comune.	
p_6 : În desen, există puncte care sunt situate atât în interiorul unghiului AOC cât și în interiorul unghiului BOD .	



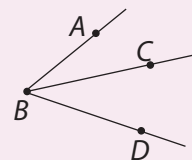
Minitest

1. Copiați pe caiete și observați figura alăturată, apoi completați spațiile libere astfel încât să obțineți enunțuri adevărate.

- (15 p) **a)** În figură sunt reprezentate unghiurile:
 (15 p) **b)** Laturile unghiului ABC sunt semidreptele
 (15 p) **c)** Vârful unghiului CBD este

2. Desenați punctele coliniare A, B, C, D , în această ordine și punctul P exterior dreptei AB .

- (15 p) **a)** Scrieți toate unghiurile ale căror laturi sunt două dintre semidreptele PA, PB, PC, PD .
 (15 p) **b)** Enumerați punctele reprezentate în interiorul unghiului APD .
 (15 p) **c)** Enumerați punctele reprezentate în exteriorul unghiului CPD .



Se acordă 10 puncte din oficiu.

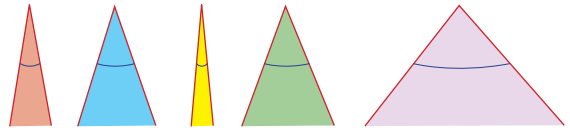


L2 Măsura unui unghi



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În imaginea alăturată, sunt reprezentate mai multe unghiuri cărora le-am evidențiat interioarele, prin culori diferite. Intuitiv, stabilim că unghiul galben este cel mai *mic*, iar unghiul mov este cel mai *mare*, putem chiar să ordonăm unghiurile în funcție de deschiderea laturilor.



Construim, *cu aceeași deschidere a compasului*, în fiecare dintre ele, câte un arc de cerc cu centrul în vârful unghiului și observăm că *lungimea arcelor* este diferită, unele sunt mai lungi altele mai scurte, deci vom caracteriza deschiderea unghiurilor în funcție de lungimea acestor arce.



Ne amintim

Pentru a măsura lungimile segmentelor, am definit *segmentul unitate* și instrumentul geometric pentru măsurarea lungimilor, *rigla gradată*.

În mod asemănător, pentru măsurarea unghiurilor vom folosi *unghiul unitate* și instrumentul geometric pentru măsurarea unghiurilor, *raportorul*.

Unghiul unitate pe care-l vom folosi se numește *grad sexagesimal* (notat 1°).

Raportorul este conturat de două semicercuri (jumătăți de cerc) cu același centru, împărțite în câte 180 de părți egale, cărora le vom spune *diviziuni*.

Arcul corespunzător unei diviziuni reprezintă 1° .

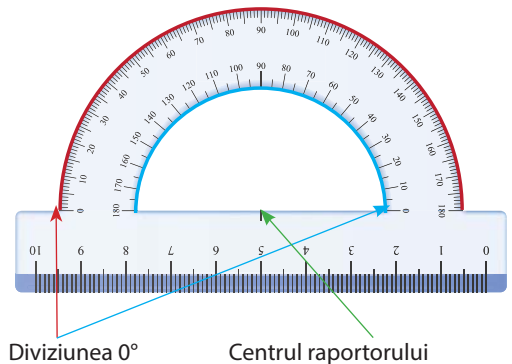
Centrul comun al cercurilor din care provin semicercurile se numește *punct origine* sau *centrul raportorului*.

Pentru ușurința măsurării se gradează ambele semicercuri (cercul mare, de la stânga la dreapta și cercul mic, de la dreapta la stânga).

Diviziunea 0° , de la care începe măsurarea, este situată în stânga, pe cercul mare și în dreapta, pe cercul mic.

Observație. Un raportor simulează alăturarea a 180 de *unghiuri unitate* cu același vârf.

Măsura unui unghi este *numărul de unghiuri unitate* care se cuprind în deschiderea unghiului dat.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

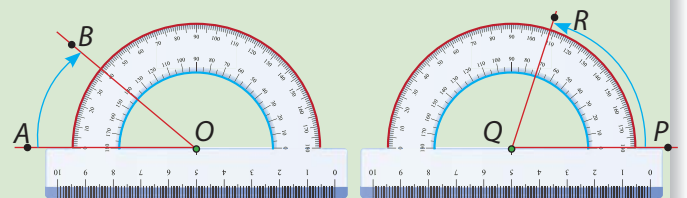
Lucrare practică 3: Măsurarea unghiurilor cu ajutorul raportorului

Materiale necesare: caietul de matematică, rigla negradată, raportor, un creion ascuțit.

Pas 1. Reprezentați pe caiete unghiurile oarecare AOB și PQR . Dorim să știm ce măsură are fiecare, deci câte unghiuri unitate se cuprind în deschiderea fiecăruia. Pentru exemplificare, vom lucra cu unghiurile din imagine.

Pas 2. Așezați raportorul astfel încât:

- centrul raportorului să se suprapună cu vârful unghiului;
- una din laturile unghiului trece prin una dintre diviziunile 0° ;
- cealaltă latură intersectează arcele raportorului.



Pas 3. Urmăriți diviziunile raportorului, de la 0° spre 180° ; vă opriți la diviziunea în care a doua latură a unghiului intersectează semicercul urmărit.

Pas 4. Scrieți măsura obținută. În exemplul nostru, pentru $\sphericalangle AOB$, am urmărit diviziunile pe semicercul mare și am obținut $\sphericalangle AOB = 41^\circ$, iar pentru $\sphericalangle PQR$, am urmărit diviziunile pe semicercul mic și am obținut $\sphericalangle PQR = 73^\circ$. Evident, $\sphericalangle BOA = 41^\circ$ și $\sphericalangle RQP = 73^\circ$.

Citim: „măsura unghiului AOB este 41° ” sau „unghiului AOB are măsura 41° ”.

Citim: „măsura unghiului PQR este 73° ” sau „unghiului PQR are măsura 73° ”.

Observație. Măsura unui unghi se exprimă printr-un număr α de grade sexagesimale cu $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Se pune acum, în mod firesc, problema construirii unui unghi AOB , căruia îi cunoaștem măsura α° .

Lucrare practică 4: Construcția unui unghi de măsură dată. Ne propunem să construim un unghi AOB cu măsura de 102° .

Materiale necesare: caietul de matematică, rigla negradată, raportor, un creion ascuțit.

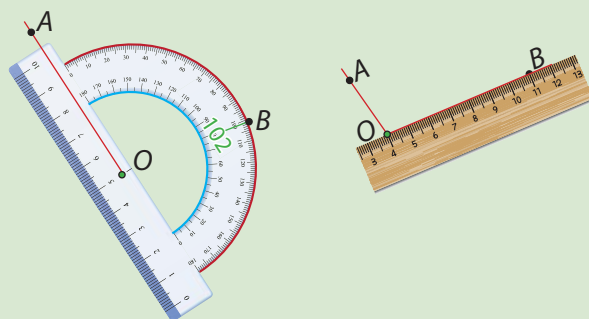
Pas 1. Trasați, cu ajutorul riglei, semidreapta OA .

Pas 2. Fixați centrul raportorului în punctul O , care va fi vârful unghiului.

Pas 3. Rotiți raportorul, păstrând centrul în poziție fixă, până când una din diviziunile 0° se află pe semidreapta OA (Noi am ales diviziunea 0° pe semicercul mare).

Pas 4. Identificați diviziunea 102° pe semicercul corespunzător diviziunii 0° pe care ați ales-o și marcați punctul B în dreptul acestei diviziuni.

Pas 5. Reprezentați, cu rigla, semidreapta OB , a doua latură a unghiului.



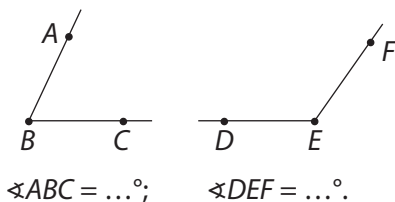
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Desenați unghiurile ABC , DEF și GHI .

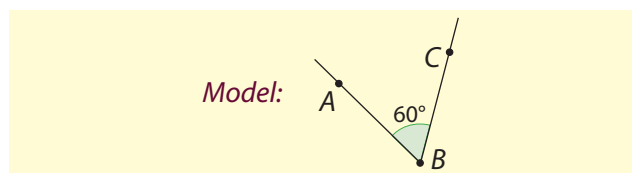
Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile construite, apoi copiați tabelul pe caiete și completați în casetele libere măsurile găsite.

Unghiul	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle DEF$	$\sphericalangle GHI$
Măsura unghiului			

2. Determinați, folosind raportorul, măsurile unghiurilor din figura alăturată.



3. Construiți pe caiete, cu ajutorul raportorului, apoi marcați ca în modelul următor, unghiul ABC cu măsura:



- a) 60° ; c) 90° ; e) 180° ;
b) 35° ; d) 132° ; f) 75° .



L3 Clasificări de unghiuri. Unghiuri congruente



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Am văzut în lecția anterioară că măsura unui unghi se exprimă printr-un număr α de grade sexagesimale cu $0^\circ \leq \alpha^\circ \leq 180^\circ$.

Pentru a realiza schița caselor vecinilor săi, Mihai a folosit rigla și raportorul.

Măsurați unghiurile ale căror laturi sunt evidențiate cu roșu și notați-le pe caiete.

Folosind măsurătorile făcute, putem estima și măsurile celorlalte unghiuri care apar în imagine pentru a stabili că:



P_1 . Cele mai multe unghiuri reprezentate au măsura de 90° . (identificați zece dintre ele)

P_2 . Există în imagine și unghiuri cu măsura mai mică de 90° . (identificați două dintre ele)

P_3 . Există în imagine și unghiuri cu măsura mai mare de 90° . (identificați două dintre ele)

Observație. În practică, întâlnim frecvent unghiul de 90° , sau unghiul drept, prin comparație cu care, vom clasifica celelalte unghiuri.

Ținând cont de măsura unui unghi, acesta poate fi:

Unghi ascuțit	Unghi drept	Unghi obtuz
Un unghi cu măsura <i>mai mică</i> de 90° se numește <i>unghi ascuțit</i> .	Un unghi cu măsura <i>egală</i> cu 90° se numește <i>unghi drept</i> .	Un unghi cu măsura <i>mai mare</i> de 90° se numește <i>unghi obtuz</i> .

În cele trei cazuri, descrise mai sus, am avut în vedere unghiuri ale căror laturi sunt semidrepte situate pe drepte diferite. Prin urmare, cele trei puncte cu ajutorul cărora numim unghiul sunt necoliniare.

Dacă laturile unui unghi sunt semidrepte ale aceleiași drepte, adică punctele care numesc unghiul sunt coliniare, sunt posibile *cazurile particulare*:

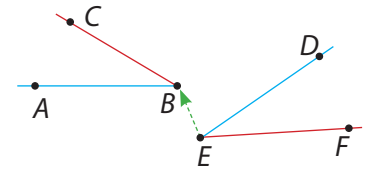
Un unghi cu măsura 0° se numește <i>unghi nul</i> .	Un unghi cu măsura 180° se numește <i>unghi alungit</i> .
Laturile unghiului nul sunt <i>semidrepte identice</i> . $\sphericalangle AOB = 0^\circ$	Laturile unghiului alungit sunt <i>semidrepte opuse</i> . $\sphericalangle AOB = 180^\circ$

Unghiuri congruente

Desenați pe o foaie transparentă configurația alăturată, apoi decupați după laturile unghiurilor ABC și DEF . Suprapuneți punctul E peste punctul B și semidreapta ED peste semidreapta BA . Vom constata că se suprapune și semidreapta BC peste EF , adică cele două unghiuri coincid prin suprapunere.

Observație. Ajungem la aceeași concluzie și dacă suprapunem BA cu EF și BC cu ED .

Două unghiuri, ABC și DEF care prin suprapunere coincid se numesc unghiuri congruente.



Scriem $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ și citim unghiul ABC este congruent cu unghiul DEF .

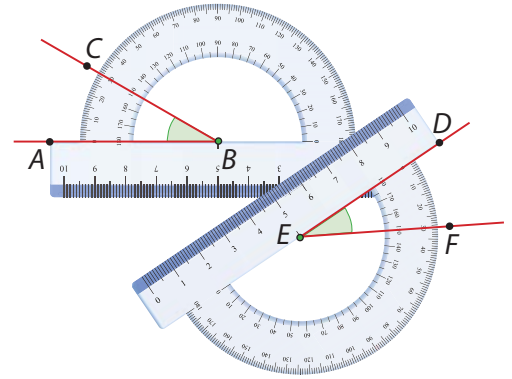
Imaginile prin care a fost ilustrată construcția unui unghi de măsură dată conduc la următoarea caracterizare a unghiurilor congruente.

Dacă unghiurile ABC și DEF sunt congruente, atunci acestea au aceeași măsură.

Dacă unghiurile ABC și DEF au aceeași măsură, atunci acestea sunt congruente.

Matematic, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ dacă și numai dacă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.

Observație. Folosim notația $\sphericalangle ABC$ atât pentru a numi unghiul ABC cât și pentru măsura unghiului ABC .

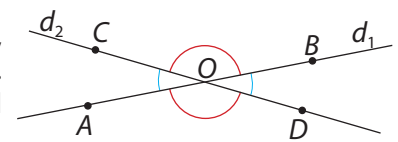


Reținem

- $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$, oricare ar fi unghiul $\sphericalangle A$ (Orice unghi este congruent cu el însuși)
- Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, atunci $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A$.
- Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, atunci $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$.

Aplicație practică

Dreptele diferite d_1 și d_2 se intersectează în punctul O . Pe dreapta d_1 , considerăm punctele A și B astfel încât O să se găsească pe segmentul AB . Pe dreapta d_2 , considerăm punctele C și D astfel încât O să fie un punct al segmentului CD .



- Măsurați, cu ajutorul raportorului, unghiurile AOC , COB , BOD și DOA și stabiliți dacă pot fi grupate în perechi de unghiuri congruente.
- Formulați o caracterizare a unghiurilor congruente marcate în figură, cu referire la poziția laturilor acestora.
- Identificați unghiuri alungite în figura dată și decideți dacă acestea sunt congruente.

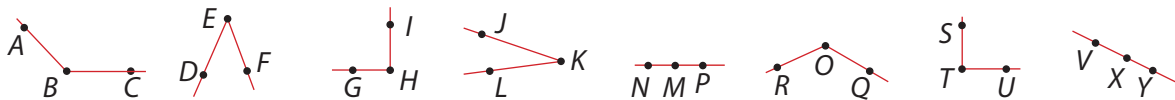
Soluție.

- În desenul nostru, $\sphericalangle AOC = 30^\circ$, $\sphericalangle COB = 150^\circ$, $\sphericalangle BOD = 30^\circ$ și $\sphericalangle DOA = 150^\circ$, deci sunt două perechi de unghiuri cu aceeași măsură, adică de unghiuri congruente: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle COB = \sphericalangle DOA$, adică $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$ și $\sphericalangle COB \equiv \sphericalangle DOA$.
- Laturile unghiurilor AOC și BOD sunt perechi de semidrepte opuse ale dreptelor d_1 și d_2 . Laturile unghiurilor DOA și COB sunt, de asemenea, perechi de semidrepte opuse ale dreptelor d_1 și d_2 .
- Unghiurile AOB și COD sunt unghiuri alungite. $\sphericalangle AOB = 180^\circ = \sphericalangle COD$, adică $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Fără a măsura unghiurile reprezentate în figură, estimați măsurile acestora și grupați-le, apoi copiați tabelul pe caiete și completați-l după model.



Unghiuri nule	Unghiuri ascuțite	Unghiuri drepte	Unghiuri obtuze	Unghiuri alungite
$\sphericalangle MNP$	$\sphericalangle JKL$	$\sphericalangle STU$	$\sphericalangle ROQ$	$\sphericalangle NMP$

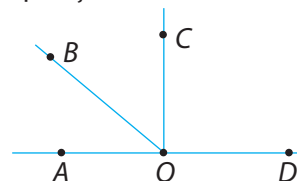
2. Unghiul ABC are măsura 64° , iar $\sphericalangle DEF$ are măsura 125° . Construiți:
- unghiul MON congruent cu $\sphericalangle ABC$;
 - unghiul PQR congruent cu $\sphericalangle DEF$.
3. a) Determinați cu ajutorul raportorului măsurile unghiurilor ABC și DEF .



- b) Construiți unghiurile MNP și XYZ , astfel încât $\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle XYZ \equiv \sphericalangle DEF$.
4. a) Desenați un unghi ABC cu măsura 50° .
 b) Construiți unghiul DEF congruent cu unghiul ABC .
 c) Construiți unghiul CBD congruent cu unghiul ABC .
 d) Verificați dacă unghiul DEF este congruent cu unghiul CBD .
5. $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit. De aceeași parte a dreptei AB , se iau punctele C, D astfel încât $\sphericalangle AOC = 67^\circ$ și $\sphericalangle AOD = 113^\circ$.
- Construiți pe caiete, folosind raportorul și rigla, configurația dată.

- b) Măsurați cu ajutorul raportorului unghiurile AOB, COD și BOD .
 c) Arătați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.

6. Analizați desenul de mai jos și completați în căsuța liberă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F	Propoziția	A/F
$\sphericalangle AOB$ este ascuțit		$\sphericalangle AOD$ este alungit	
$\sphericalangle BOC$ este drept		$\sphericalangle DAO$ este nul	
$\sphericalangle AOC$ este obtuz		$\sphericalangle BOD$ este obtuz	
$\sphericalangle COD$ este drept		$\sphericalangle ADO$ este alungit	

7. a) Construiți unghiurile AOB și BOC , știind că nu au puncte interioare comune, în fiecare din situațiile:
- $\sphericalangle AOB = 140^\circ$ și $\sphericalangle BOC = 40^\circ$;
 - $\sphericalangle AOB = 68^\circ$ și $\sphericalangle BOC = 102^\circ$.
- b) În fiecare din cele două configurații obținute la subpunctul a), măsurați unghiul AOC și stabiliți dacă punctele A, O, C sunt coliniare.



Minitest

1. Alegeți răspunsul corect. Numai un răspuns este corect.

Dacă A, M, B sunt coliniare, în această ordine, atunci:

(20p) a) Unghiul BMA este:

A. ascuțit; B. obtuz; C. nul; D. alungit.

(20p) b) Unghiul BAM este:

A. drept; B. obtuz; C. nul; D. alungit.

(20p) 2. a) Construiți semidreptele distincte OA, OM, ON, OP, OB astfel încât unghiurile AOM, MON, NOP, POB să fie congruente și $\sphericalangle MOP = 60^\circ$.

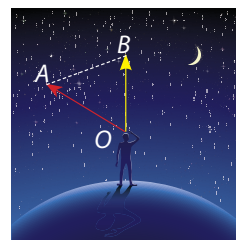
(20p) b) Arătați, prin măsurare, că $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOM$.

(10p) c) Arătați, prin măsurare, că unghiul AOB este obtuz, iar unghiul BOM este drept.

Se acordă un punct din oficiu.

L4 Calcule cu măsuri de unghiuri exprimate în grade și minute sexagesimale

Să ne imaginăm că privim cerul într-o noapte senină. Vedem o mulțime de obiecte strălucitoare. Dorim să identificăm distanța dintre două stele. Unul dintre elementele de care avem nevoie este unghiul sub care vedem distanța dintre cele două obiecte. Acest unghi este determinat de semidreptele OA și OB , unde O este punctul în care se află ochiul nostru (vârful unghiului) iar A și B sunt punctele care identifică cele două obiecte. Cum distanța de la noi la obiectele vizate este foarte mare, cu ochiul liber, s-ar putea să vedem cele două puncte (obiecte) suprapuse (ca și cum ar fi unul singur). Când se întâmplă asta?



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ochiul omului vede distinct două puncte numai dacă distanța dintre ele se vede sub un unghi mai mare decât a 60-a parte dintr-un grad sexagesimal; în caz contrar, punctele sunt văzute ca unul singur.

În consecință, din considerente practice, vorbim de *submultiplul gradului* egal cu $\frac{1}{60}$ dintr-un grad, pe care îl vom numi *minut*. Vom scrie $1^\circ = 60'$ și citim „un grad este egal cu 60 de minute”.

Observații

Gradul sexagesimal reprezintă un unghi a cărui deschidere este a 360 – a parte dintr-un cerc. Aflăm, printr-un calcul simplu, că minutul sexagesimal reprezintă un unghi cu deschiderea egală cu a 21 600-a parte dintr-un cerc; $360^\circ = (360 \cdot 60)' = 21\ 600'$

Când scriem măsura unui unghi în *grade și minute*, avem grijă ca *numărul minutelor* să reprezinte mai puțin de un grad (să fie mai mic decât 60).

Exemplu: $\sphericalangle AOB = 29^\circ 45'$, adică măsura unghiului AOB este 29 grade și 45 minute.

Măsura a două *unghiuri congruente* se exprimă prin același număr de grade respectiv același număr de minute.

Exemplu. Dacă $\sphericalangle ABC = 12^\circ 15'$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD$, atunci $\sphericalangle BCD = 12^\circ 15'$. (măsura unghiului ABC este egală cu măsura unghiului BCD)

Dacă măsura unghiului A este mai mică decât măsura unghiului B , atunci vom scrie $\sphericalangle A < \sphericalangle B$ sau $\sphericalangle B > \sphericalangle A$ și spunem „unghiul A este mai mic decât unghiul B ” sau „unghiul B este mai mare decât unghiul A ”.

Exemplu.
 $\sphericalangle CDE = 43^\circ 6'$, $\sphericalangle DEF = 42^\circ 59'$,
 $\sphericalangle EFG = 81^\circ 12'$, $\sphericalangle FEH = 81^\circ 54'$.
Din $43^\circ 6' > 42^\circ 59'$ rezultă $\sphericalangle CDE > \sphericalangle DEF$, iar din $81^\circ 12' < 81^\circ 54'$, rezultă $\sphericalangle EFG < \sphericalangle FEH$.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Cu măsurile unghiurilor se pot face operații: adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri, având grijă la condițiile care rezultă din scrierea acestora în grade și minute.

Comentariu.

Pentru a afla tehnicile de efectuare a acestor operații, propunem patru aplicații practice pentru a fi parcurse folosind „Turul galeriei”.

Adunarea măsurilor unghiurilor

Dacă se cunosc măsurile unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$, atunci se poate calcula suma $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ a măsurilor lor.

Aplicația practică 1.

Adunarea măsurilor a două unghiuri.

- Știind că $\sphericalangle ABC = 12^\circ 15'$ și $\sphericalangle EFG = 81^\circ 12'$, calculați suma $\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG$.
- Știind că $\sphericalangle CDE = 43^\circ 56'$ și $\sphericalangle DEF = 42^\circ 59'$, calculați suma $\sphericalangle CDE + \sphericalangle DEF$.

- Pas 1.** Calculați suma dintre numărul gradelor celor două măsuri de unghiuri.
- Pas 2.** Calculați suma dintre numărul minutelor celor două măsuri de unghiuri.
- Pas 3.** Dacă suma minutelor este mai mică de 60, atunci scriem rezultatul.
- Pas 4.** Dacă suma minutelor este mai mare sau egală cu 60, atunci fiecare 60 de minute reprezintă un grad, care se adaugă la suma gradelor.

a) Dacă $\sphericalangle ABC = 12^\circ 15'$ și $\sphericalangle EFG = 81^\circ 12'$,
atunci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = 12^\circ 15' + 81^\circ 12'$.
Rezultă $\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = 93^\circ 27'$.

$$\begin{array}{r} 12^\circ 15' + \\ 81^\circ 12' \\ \hline 93^\circ 27' \end{array}$$

b) Dacă $\sphericalangle CDE = 43^\circ 56'$ și $\sphericalangle DEF = 42^\circ 59'$,
atunci $\sphericalangle CDE + \sphericalangle DEF = 43^\circ 56' + 42^\circ 59'$.
Dar, $115' = 60' + 45' = 1^\circ + 55'$, adică
 $85^\circ 115' = 86^\circ 55'$ și $\sphericalangle CDE + \sphericalangle DEF = 86^\circ 55'$.

$$\begin{array}{r} 43^\circ 56' + \\ 42^\circ 59' \\ \hline 85^\circ 115' \end{array}$$

Model de redactare pentru suma măsurilor a două unghiuri: Fie $\sphericalangle MNP = 54^\circ 58'$, $\sphericalangle QRS = 42^\circ 37'$;
 $\sphericalangle MNP + \sphericalangle QRS = 54^\circ 58' + 42^\circ 37' = (54 + 42)^\circ + (58 + 37)' = 96^\circ 95' = 96^\circ + (1 \cdot 60 + 35)' = 96^\circ + 1^\circ + 35' = 97^\circ 35'$.

Observație. Pentru ca suma dintre măsurile a două unghiuri să reprezinte tot un unghi este necesar ca acesta să nu depășească $180^\circ 0'$.

Scăderea măsurilor unghiurilor

Dacă $\sphericalangle B \geq \sphericalangle A$, atunci se poate calcula diferența dintre măsurile lor, $\sphericalangle B - \sphericalangle A$.

Aplicația practică 2.

Scăderea măsurilor a două unghiuri.

- a) Știind că $\sphericalangle ABC = 12^\circ 15'$ și $\sphericalangle CDE = 43^\circ 56'$, calculați diferența $\sphericalangle CDE - \sphericalangle ABC$.
b) Știind că $\sphericalangle EFG = 81^\circ 12'$ și $\sphericalangle DEF = 42^\circ 59'$, calculați diferența $\sphericalangle EFG - \sphericalangle DEF$.

Pas 1. Dacă numărul minutelor descăzutului este mai mare sau egal decât numărul minutelor scăzătorului, atunci se calculează diferența dintre numărul gradelor, apoi diferența dintre numărul minutelor și se scrie rezultatul.

Pas 2. Dacă numărul minutelor descăzutului este mai mic decât numărul minutelor scăzătorului, se împrumută un grad de la descăzut care se transformă în minute, apoi se efectuează operațiile.

a) Dacă $\sphericalangle CDE = 43^\circ 56'$, $\sphericalangle ABC = 12^\circ 15'$, cum
 $43^\circ 56' > 12^\circ 15'$, rezultă că există diferența
 $\sphericalangle CDE - \sphericalangle ABC = 43^\circ 56' - 12^\circ 15'$.
Cum $56 > 15$, rezultă $\sphericalangle CDE - \sphericalangle ABC = 31^\circ 41'$.

$$\begin{array}{r} 43^\circ 56' - \\ 12^\circ 15' \\ \hline 31^\circ 41' \end{array}$$

b) Dacă $\sphericalangle EFG = 81^\circ 12'$, $\sphericalangle DEF = 42^\circ 59'$, cum
 $43^\circ 56' > 12^\circ 15'$, rezultă că există diferența
 $\sphericalangle EFG - \sphericalangle DEF = 81^\circ 12' - 42^\circ 59'$.

$$\begin{array}{r} 80^\circ 72' - \\ 42^\circ 59' \\ \hline 38^\circ 13' \end{array}$$

Deoarece $12 < 59$, împrumutăm un grad.

$$81^\circ 12' = 80^\circ + (60 + 12)' = 80^\circ 72'.$$

Din $81^\circ 12' - 42^\circ 59' = 38^\circ 13'$, rezultă
 $\sphericalangle EFG - \sphericalangle DEF = 38^\circ 13'$.

Model de redactare pentru diferența măsurilor a două unghiuri:

- Fie $\sphericalangle MNP = 54^\circ 58'$, $\sphericalangle QRS = 42^\circ 37'$. Din $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, rezultă că se poate calcula diferența
 $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 54^\circ 58' - 42^\circ 37' = (54 - 42)^\circ + (58 - 37)' = 12^\circ 21'$.
- Fie $\sphericalangle MNP = 54^\circ 18'$, $\sphericalangle QRS = 42^\circ 37'$. Din $\sphericalangle MNP > \sphericalangle QRS$, rezultă că se poate calcula diferența
 $\sphericalangle MNP - \sphericalangle QRS = 54^\circ 18' - 42^\circ 37' = 53^\circ 78' - 42^\circ 37' = (53 - 42)^\circ + (78 - 37)' = 11^\circ 41'$.

Înmulțirea măsurii unui unghi cu un număr natural

Dacă se cunoaște măsura unghiului A , atunci se poate calcula produsul $(\sphericalangle A) \cdot n$, unde n este număr natural.

Aplicația practică 3.

Înmulțirea măsurii unui unghi cu un număr natural.

- a) Știind că $\sphericalangle CDE = 33^\circ 25'$, calculați produsul $(\sphericalangle CDE) \cdot 2$.
b) Știind că $\sphericalangle ABC = 11^\circ 15'$, calculați produsul $(\sphericalangle ABC) \cdot 7$.

Pas 1. Se înmulțește numărul gradelor cu numărul natural.

Pas 2. Se înmulțește numărul minutelor cu numărul natural; Sunt posibile situațiile:

- dacă rezultatul este mai mic decât 60', atunci trecem la etapa 3.
- dacă rezultatul este mai mare sau egal cu 60', atunci determinăm câtul și restul împărțirii acestuia la 60. Adăugăm câtul la rezultatul obținut la etapa 1, iar restul va reprezenta numărul minutelor rezultatului.

Pas 3. Scriem rezultatul înmulțirii, completând numărul gradelor obținut la pasul 1, respectiv la pasul 2 cazul al doilea și numărul minutelor obținut la etapa 2.

Fie $\sphericalangle ABC = 11^{\circ}15'$, $\sphericalangle CDE = 33^{\circ}25'$

a) $(\sphericalangle CDE) \cdot 2 = (33^{\circ}25') \cdot 2$

Pas 1. $33^{\circ} \cdot 2 = 66^{\circ}$;

Pas 2. $25' \cdot 2 = 50'$ și $50 < 60$;

Pas 3. $(\sphericalangle CDE) \cdot 2 = 66^{\circ}50'$.

b) $(\sphericalangle ABC) \cdot 7 = (11^{\circ}15') \cdot 7$

Pas 1. $11^{\circ} \cdot 7 = 77^{\circ}$;

Pas 2. $15' \cdot 7 = 105'$ și $105 \geq 60$.

$105' = 1 \cdot 60' + 45'$ și $77^{\circ} + 1^{\circ} = 78^{\circ}$.

Pas 3. $(\sphericalangle ABC) \cdot 7 = 78^{\circ}45'$.

Model de redactare: Fie $\sphericalangle MPQ = 33^{\circ}45'$. Atunci, $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = (33^{\circ}45') \cdot 5 = 165^{\circ}225' = 165^{\circ} + (3 \cdot 60 + 45)'$, deci $(\sphericalangle MPQ) \cdot 5 = (165 + 3)^{\circ} + 45' = 168^{\circ}45'$.

Observație. Pentru ca produsul dintre măsura unui unghi cu un număr natural să reprezinte tot un unghi este necesar ca acesta să nu depășească $180^{\circ}0'$.

Împărțirea măsurii unui unghi la un număr natural

Aplicația practică 4.

Împărțirea măsurii unui unghi la un număr natural nenul.

a) Știind că $\sphericalangle ABC = 12^{\circ}15'$, calculați $(\sphericalangle ABC) : 3$.

b) Știind că $\sphericalangle CDE = 32^{\circ}48'$, calculați $(\sphericalangle CDE) : 6$.

Pas 1. Determinăm câtul și restul împărțirii numărului de grade la numărul natural. Câtul va reprezenta numărul de grade al rezultatului.

Pas 2. Pentru rest, sunt posibile situațiile:

- dacă restul este 0, atunci trecem la etapa 3.
- dacă restul este diferit de 0, atunci transformăm restul în minute și adunăm numărul obținut cu numărul minutelor unghiului dat.

Pas 3. Împărțim numărului de minute, obținut la Pasul 2, la numărul natural. Câtul împărțirii va reprezenta numărul minutelor rezultatului.

Pas 4. Scriem rezultatul împărțirii, completând numărul gradelor obținut la pasul 1 și numărul minutelor, obținut la pasul 3.

Observație. Dacă numărul total al minutelor nu se divide la împărțitor, atunci rotunjim rezultatul împărțirii minutelor.

În clasele următoare, vom putea continua împărțirea, definind un submultiplu al minutelor.

a) Fie $\sphericalangle ABC = 12^{\circ}15'$; $\sphericalangle CDE = 32^{\circ}48'$.

$(\sphericalangle ABC) : 3 = (12^{\circ}15') : 3 = 4^{\circ}5'$

Pas 1. $12^{\circ} : 3 = 4^{\circ}$;

Pas 2. restul este 0;

Pas 3. $15' : 3 = 5'$

Pas 4. $(\sphericalangle ABC) : 3 = 4^{\circ}5'$;

b) $\sphericalangle CDE : 6 = (32^{\circ}48') : 6$

Pas 1. $32^{\circ} = 5^{\circ} \cdot 6 + 2^{\circ}$

Pas 2. Restul este $2 \neq 0$.

Atunci, $2^{\circ} = 120'$ și $120' + 48' = 168'$.

Pas 3. $168' : 6 = 28'$.

Pas 4. $\sphericalangle CDE : 6 = 5^{\circ}28'$.

Model de redactare: Dacă $\sphericalangle MPQ = 123^{\circ}45'$, atunci $(\sphericalangle MPQ) : 5 = (123^{\circ}45') : 5 = [(24 \cdot 5 + 3)^{\circ} + 45'] : 5 = 24^{\circ} + [(3 \cdot 60 + 45) : 5]' = 24^{\circ} + (225 : 5)' = 24^{\circ} + 45'$, adică $(\sphericalangle MPQ) : 5 = 24^{\circ}45'$.

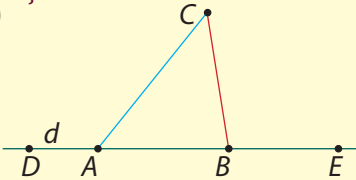
Problemă rezolvată

Pe dreapta d considerăm punctele coliniare A, B, D și E astfel încât A și B să se afle pe segmentul DE și $DA < DB$. Fie C un punct exterior dreptei d .

- Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.
- Măsurați cu raportorul și scrieți măsurile unghiurilor: $\sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA, \sphericalangle CAB, \sphericalangle DAC, \sphericalangle CBE$.
- Calculați $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB$.
- Comparați măsurile: $\sphericalangle DAC$ cu $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA$, apoi $\sphericalangle CBE$ cu $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB$.

Soluție.

a)



- În exemplul nostru, $\sphericalangle ABC = 80^\circ, \sphericalangle BCA = 50^\circ, \sphericalangle CAB = 50^\circ, \sphericalangle DAC = 130^\circ, \sphericalangle CBE = 100^\circ$.
- $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 180^\circ$.
(Ați obținut același rezultat?)
- $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = \sphericalangle CBE$
(Ați obținut același rezultat?)



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Exprimați în minute sexagesimale, după modelul prezentat la a):
 - $7^\circ = (7 \cdot 60)' = 420'$
 - 53°
 - $100^\circ 20'$
 - $98^\circ 5'$
- Exprimați în grade sexagesimale, după modelul prezentat la a):
 - $120' = (120 : 60)^\circ = 2^\circ$
 - $180'$
 - $900'$
 - $60'$
- Exprimați în grade și minute, după modelul prezentat la a):
 - $105' = (1 \cdot 60 + 45)' = 1^\circ 45'$
 - $1000'$
 - $2022'$
- Calculați:
 - $43^\circ + 65^\circ$
 - $104^\circ + 28^\circ$
 - $107^\circ - 39^\circ$
 - $180^\circ - 78^\circ + 36^\circ$
 - $42^\circ 32' + 65^\circ 16'$
 - $37^\circ 26' + 62^\circ 34'$
 - $72^\circ 54' + 83^\circ 43'$
 - $1300' + 55^\circ 48'$
 - $127^\circ 54' - 62^\circ 41'$
 - $145^\circ 34' - 108^\circ 58'$
 - $82^\circ 54' - 3601'$
 - $9000' - 95^\circ 17'$
- Efectuați calculele:
 - $4 \cdot 15^\circ$
 - $12 \cdot 13^\circ$
 - $3 \cdot 37^\circ 14'$
 - $7^\circ 7' \cdot 10$
 - $108^\circ : 3$
 - $125^\circ : 5$
 - $120^\circ 30' : 6$
 - $120^\circ : 9$
- a) Determinați, cu ajutorul raportorului, măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle AOC$.
 - Verificați dacă între măsurile celor trei unghiuri are loc relația: $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$.
- Determinați, cu ajutorul raportorului, măsurile unghiurilor $\sphericalangle ABC, \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle ABD$.
 - Verificați dacă între măsurile celor trei unghiuri au loc relațiile: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD - \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABD - \sphericalangle ABC$.

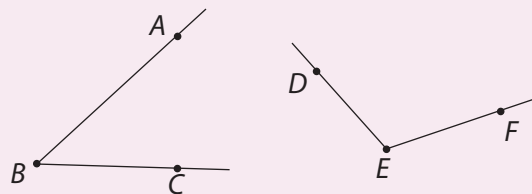




Minitest

1. Tania a măsurat unghiurile din desenul alăturat, a obținut $\sphericalangle ABC = x^\circ$ și $\sphericalangle DEF = y^\circ$ și a spus:

- (10p) p_1 : Măsura unghiului ABC este mai mică decât 90° .
 (10p) p_2 : Măsura unghiului DEF este 90° .
 (20p) p_3 : $x^\circ + y^\circ < 180^\circ$.



Măsurați unghiurile din imagine și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor formulate de Tania.

2. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

- (10p) a) Dintre egalitățile următoare este adevărată:
A. $1' = 60^\circ$; **B.** $1^\circ = 600'$; **C.** $1' = 600''$; **D.** $1^\circ = 60'$.
 (40p) b) Rezultatul calculului $60^\circ + 2 \cdot 45' + 59^\circ 30' : 7$ este:
A. 63° ; **B.** 65° ; **C.** 70° ; **D.** 157° .

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

I. Realizați câte un desen care să conțină:

- (5p) 1. unghiul ABC , punctul D , în interiorul unghiului și punctul F , în exteriorul unghiului;
 (5p) 2. unghiul drept MNP și punctul Q , în interiorul unghiului astfel încât $\sphericalangle MNQ = 40^\circ$.
 (5p) 3. unghiurile RST și TSV , având interioarele diferite, $\sphericalangle RST = 60^\circ$, $\sphericalangle RSV = 110^\circ$.

II. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

- (5p) 1. Transformând în grade sexagesimale $7200'$, obținem:
A. 72° ; **B.** 100° ; **C.** 120° **D.** 160° .
 (5p) 2. Rezultatul calculului $143^\circ - 109^\circ + 37^\circ$ este:
A. 73° ; **B.** 71° ; **C.** 81° **D.** 83° .
 (5p) 3. Rezultatul calculului $4 \cdot 15^\circ + 12 \cdot (3^\circ 20')$ este:
A. 100° ; **B.** 90° ; **C.** 110° **D.** 120° .
 (5p) 4. Un unghi are măsura $81^\circ - 4860'$. Acest unghi este:
A. unghi ascuțit; **B.** unghi drept; **C.** unghi obtuz; **D.** unghi nul.

III. Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1. Fie P un punct în interiorul unghiului AOB astfel încât $\sphericalangle AOB = 3 \cdot \sphericalangle AOP$.
 (5p) a) Aflați măsura unghiului BOP , știind că $\sphericalangle AOP = 28^\circ$.
 (10p) b) Aflați măsura unghiului AOB , știind că $\sphericalangle BOP = 80^\circ$.
 (10p) c) Realizați câte un desen pentru situațiile prezentate la subpunctele a) și b).
 2. În interiorul unghiului MON cu măsura 135° , se consideră punctul P astfel încât $\sphericalangle MOP$ să fie unghi drept.
 (10p) a) Realizați un desen care să corespundă datelor enunțului.
 (10p) b) Calculați măsura unghiului NOP .
 (10p) c) Completați desenul cu semidreapta OQ , opusă semidreptei ON și arătați că $\sphericalangle NOP \equiv \sphericalangle MOQ$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



3 FIGURI CONGRUENTE. AXĂ DE SIMETRIE

L1 Figuri congruente



Ne amintim

Am descoperit în lecțiile anterioare următoarea caracterizare a segmentelor congruente și a unghiurilor congruente:

Segmente congruente	Unghiuri congruente
1. Dacă două segmente coincid prin suprapunere (sunt congruente), atunci acestea au aceeași lungime.	1. Dacă două unghiuri coincid prin suprapunere (sunt congruente), atunci acestea au aceeași măsură.
2. Dacă două segmente au aceeași lungime, atunci ele coincid, prin suprapunere, adică sunt congruente.	2. Dacă două unghiuri au aceeași măsură, atunci ele coincid, prin suprapunere, adică sunt congruente.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

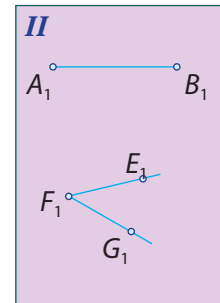
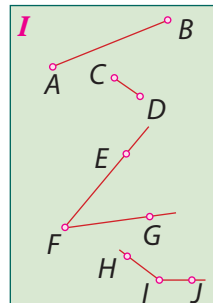
Vom ilustra cele de mai sus, încă o dată, prin lucrarea practică propusă mai jos.

Lucrare practică 1: Verificarea congruenței a două figuri geometrice, prin suprapunere

Materiale necesare: folii transparente, markere, o riglă gradată, un raportor.

Pas 1. Măsurați toate figurile reprezentate în figura alăturată și completați pe caiete tabelul:

figura	segmente			unghiuri		
	AB	CD	A_1B_1	EFG	HIJ	$E_1F_1G_1$
măsura						



Pas 2. Notați foliile transparente pe care le-ați pregătit cu I și cu II, apoi reprezentați, folosind riglă gradată și raportorul, segmente și unghiuri ca în figura alăturată.

Pas 3. Identificați figuri geometrice care coincid prin suprapunere.

Pas 4. Pentru fiecare pereche de figuri care coincid, prin suprapunere, comparați măsurile găsite la pasul 1.

Detaliem pasul 3 și pasul 4, mai jos.

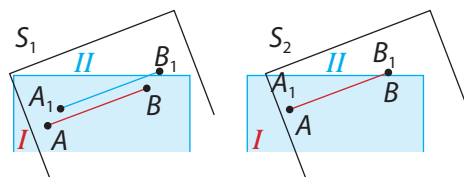
Intuim că:

1. segmentele AB și A_1B_1 coincid prin suprapunere;
2. segmentele AB și CD nu coincid;
3. unghiurile EFG și $E_1F_1G_1$ coincid prin suprapunere;
4. unghiurile HIJ și $E_1F_1G_1$ nu coincid prin suprapunere.

Trebuie să verificăm dacă ceea ce am intuit, vizual, se confirmă. Prezentăm, câteva secvențe ale procesului de verificare pe care le notăm cu $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Consultați manualul digital pentru a viziona filmul complet al verificării.

Secvențe ale verificării



Segmentul AB coincide prin suprapunere cu segmentul A_1B_1 , deci cele două segmente sunt congruente, adică $AB \equiv A_1B_1$ și $AB = A_1B_1$



	<p>Segmentul CD nu coincide prin suprapunere cu segmentul A_1B_1, deci cele două segmente nu sunt congruente.</p>				<p>Semidreptele IH și IJ nu se pot suprapune în același timp cu F_1E_1 respectiv F_1G_1.</p>
<p>Consultăm tabelul cu rezultatele măsurătorilor și constatăm că cele două segmente au lungimi diferite. Vom scrie: $CD \not\equiv A_1B_1$ și $CD \neq A_1B_1$.</p>	<p>Prin suprapunere, semidreptele FE și F_1E_1 coincid, FG și F_1G_1 coincid, deci unghiurile EFG și $E_1F_1G_1$ coincid, deci $\sphericalangle EFG \equiv \sphericalangle E_1F_1G_1$ și $\sphericalangle EFG = \sphericalangle E_1F_1G_1$</p>	<p>Consultăm tabelul cu rezultatele măsurătorilor și constatăm că cele două unghiuri au măsuri diferite. Vom scrie: $\sphericalangle HIJ \not\equiv \sphericalangle E_1F_1G_1$ și $\sphericalangle HIJ \neq \sphericalangle E_1F_1G_1$</p>			

Doă *figuri geometrice* se numesc *congruente* dacă, prin suprapunere, coincid.



Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Ne întrebăm prin ce se caracterizează congruența a două figuri geometrice mai complicate decât segmentele sau unghiurile. Pentru clasa a V-a, ne propunem doar să *observăm* astfel de figuri.

În imaginea alăturată sunt reprezentate două *triunghiuri congruente*. Arcele de cerc punctate marchează *corespondența elementelor* (vârfurilor, laturilor, unghiurilor) care se suprapun pentru a evidenția congruența lor.

Perechile de elemente asociate se numesc *vârfuri corespunzătoare*, *unghiuri corespunzătoare*, *laturi corespunzătoare*.

Segmentele AB și MN sunt laturi corespunzătoare; $\sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle PMN$ sunt unghiuri corespunzătoare;

Dacă suprapunem triunghiurile astfel încât să coincidă, atunci, coincid prin suprapunere:

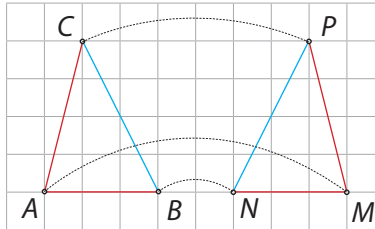
Segmentele: AB și MN ; AC și MP ; BC și NP . Scriem: $AB \equiv MN$; $AC \equiv MP$; $BC \equiv NP$.

Unghiurile: CAB și PMN ; ABC și MNP ; ACB și MPN . Scriem $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle PMN$; $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$; $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle MPN$.

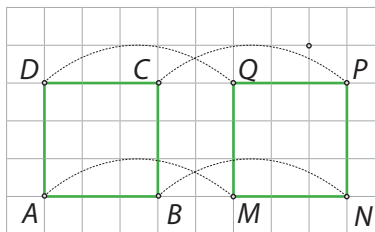
Triunghiurile ABC și MNP sunt congruente și scriem $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ sau $\triangle ACB \equiv \triangle MPN$ sau $\triangle BAC \equiv \triangle NMP$.

În imaginea alăturată sunt reprezentate două *pătrate congruente*.

Arcele de cerc punctate marchează *corespondența elementelor* (vârfurilor, laturilor, unghiurilor) care se suprapun pentru a evidenția congruența lor.



Caroiajul pe care sunt reprezentate triunghiurile ne ajută să observăm *lungimile segmentelor*, *deschiderea unghiurilor*, și să aflăm că putem *suprapune perfect* un triunghi peste celălalt dacă facem asocierile marcate.



Folosind caroiajul, constatăm că pentru a justifica faptul că sunt congruente, putem suprapune pătratele folosind corespondențele marcate sau folosind alte corespondențe.

De exemplu: Putem considera laturi corespunzătoare: **1.** AB cu MN ; BC cu NP ; CD cu PQ ; DA cu QM , sau **2.** AB cu NP ; BC cu PQ ; CD cu QM ; DA cu MN . (Găsiți alte două corespondențe!)

Se constată ușor că în cazul pătratelor, se pot găsi și alte suprapuneri pe lângă cea marcată, iar în cazul triunghiurilor reprezentate este posibilă o singură asociere a elementelor pentru ca ele să se suprapună perfect.



Reținem

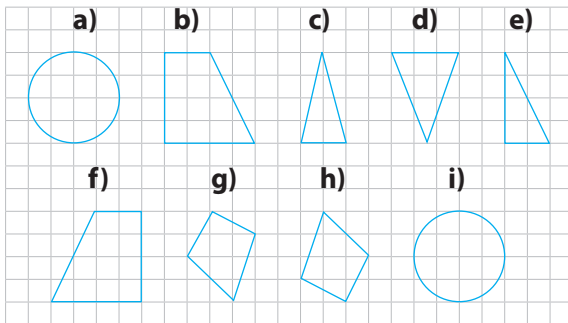
Dacă două figuri geometrice sunt congruente, atunci:

1. Toate segmentele corespunzătoare sunt congruente.
2. Toate unghiurile corespunzătoare sunt congruente.



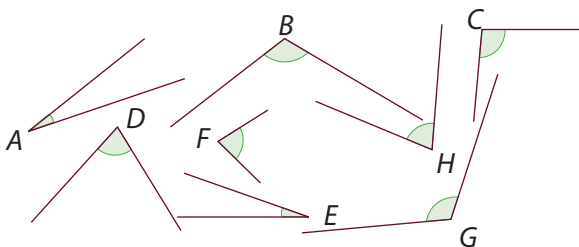
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Desenați segmentul AB , de lungime 5 cm.
 - Construiți, folosind rigla gradată, segmentul $CD \equiv AB$.
 - Construiți, folosind compasul, segmentul $EF \equiv CD$.
- Desenați unghiul $\sphericalangle ABC$ cu măsura 75° . Construiți un unghi MNP congruent cu unghiul ABC .
- Laturile pătratului $ABCD$ au lungimea de 40 mm. Construiți pătratul $ABMN$, congruent cu pătratul $ABCD$.
- Desenați pe o foaie de hârtie următoarele figuri geometrice. Decupați figurile geometrice și identificați, verificând prin suprapunere, figurile congruente.

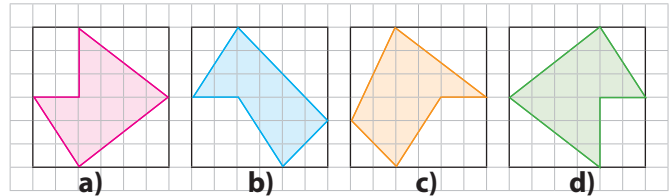


- Cu ajutorul raportorului, determinați măsurile unghiurilor din desenul de mai jos și scrieți perechile de unghiuri congruente, după model.

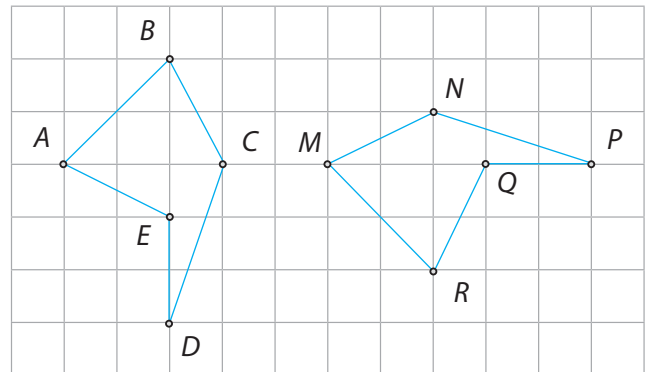
Model: Din $\sphericalangle A = \sphericalangle E$, rezultă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle E$.



- Folosind rețeaua de pătrate, identificați figuri geometrice congruente.



- Pe o rețea de pătrate sunt reprezentate două figuri geometrice congruente.



Scrieți pe caiete perechile obținute completând spațiile punctate, astfel încât perechile de puncte corespunzătoare să coincidă dacă suprapunem cele două figuri congruente.

$(A, R), (B, \dots), (\dots, N), (\dots, P), (E, \dots)$.

Reamintim: Vărfurile care coincid prin suprapunerea a două figuri congruente se numesc *vârfuri corespunzătoare*.



L2 Axă de simetrie



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Lucrare practică 1: Axa de simetrie

Materiale necesare: folie transparentă flexibilă, un instrument de scris, o riglă, un raportor.

<p>Pas 1. Desenați pe folie o dreaptă d și un punct M, exterior dreptei.</p>	<p>Pas 2. Îndoiți folia de-a lungul dreptei d, copiați punctul M, pe partea nescrisă a foliei, pe care îl veți nota cu N, apoi deschideți folia.</p>	<p>Pas 3. Trasați segmentul MN și notați cu P punctul în care MN taie dreapta d.</p>	<p>Pas 4. Îndoiți încă o dată folia după dreapta d. Identificați segmentele congruente formate, apoi unghiurile congruente formate.</p>

Concluzii:

- Punctele M și N coincid, dacă foaia se pliază după dreapta d . Vom spune că punctele M și N sunt simetrice față de dreapta d .
Punctul M este simetricul punctului N față de dreapta d .
Punctul N este simetricul punctului M față de dreapta d .
Dreapta d este axă de simetrie pentru figura formată de cele două puncte.
Punctul P este mijlocul segmentului MN .
- Segmentele MP și NP se suprapun la îndoirea după dreapta d .
Vom spune că dreapta d este axă de simetrie pentru segmentul MN .
- Unghiurile formate de dreapta d cu semidreptele PM respectiv PN se suprapun prin îndoire după dreapta d , deci sunt congruente, adică au aceeași măsură. Cum unghiul MPN este alungit, deci are 180° , deducem că fiecare din unghiurile formate de dreapta d cu semidreptele PM respectiv PN are 90° .

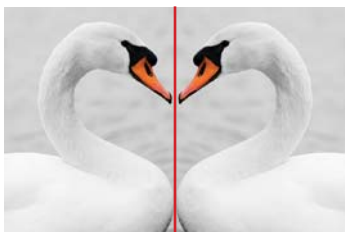


Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Simetria în natură

Observați imaginile următoare. Imaginați-vă că îndoim foaia (planul) pe care este desenată prima imagine, după dreapta d_1 , apoi cea pe care este desenată a doua imagine, după dreapta d_2 și, în final, îndoim foaia pe care este reprezentată a treia imagine, după dreapta d_3 .

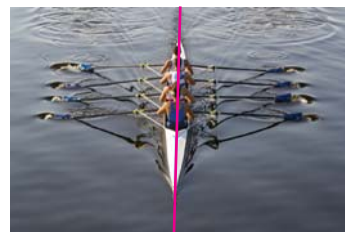
Figurile se vor suprapune perfect. Vom spune că fiecare dintre dreptele d_1, d_2, d_3 este axă de simetrie pentru figura corespunzătoare.



d_1



d_2

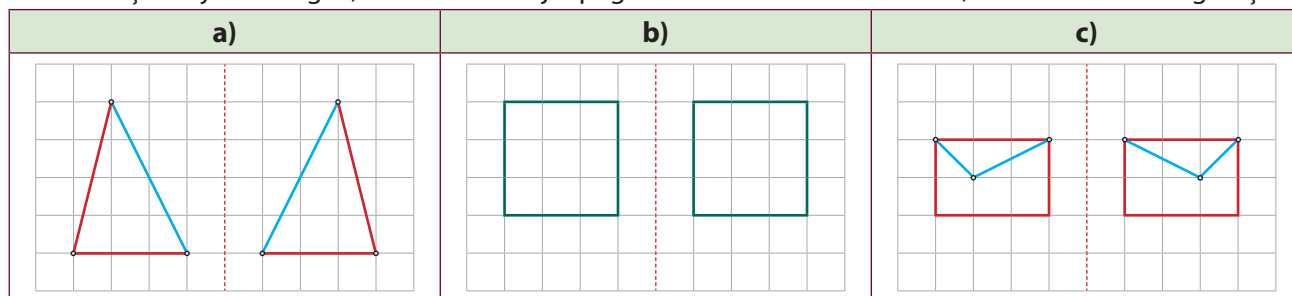


d_3



Aplicația 1.

1. Desenați cu ajutorul riglei, folosind caroiajul paginii caietului de matematică, următoarele configurații.



2. Plișați pagina caietului după dreapta punctată, reprezentată cu roșu și precizați, verificând prin suprapunere, dacă figurile reprezentate de o parte și de alta a drepte sunt congruente.

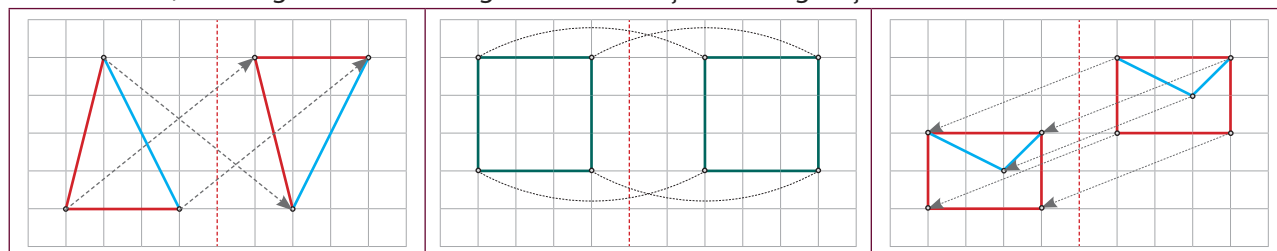
Soluție. În toate cele trei cazuri, prin plierea paginii după dreapta dată se suprapun perfect cele două figuri aflate de o parte și de alta a drepte reprezentate. În concluzie, figurile date sunt congruente.

Aceste figuri sunt reprezentate simetric față de dreapta dată.

Dreapta după care am îndoit pagina pentru a se suprapune figurile se numește *axă de simetrie* a configurației formate din cele două figuri.

Aplicația 2.

În fiecare subpunct al aplicației 1, schimbăm poziția uneia dintre figuri, în plan. Forma și măsurile rămân neschimbate, adică figurile rămân congruente. Am obținut configurațiile următoare:



1. Stabiliți dacă figurile geometrice se mai suprapun prin îndoirea paginii după dreapta punctată.

2. Stabiliți pentru care dintre cele trei configurații există *axă de simetrie*.

Soluție.

1. Arcele de cerc marchează asocieri posibile pentru ca figurile să coincidă prin suprapunere, Caroiajul paginii ne ajută să observăm că toate *unghiurile corespunzătoare* sunt respectiv congruente și că toate *laturile corespunzătoare* sunt respectiv congruente, deci figurile reprezentate sunt perechi de figuri congruente.

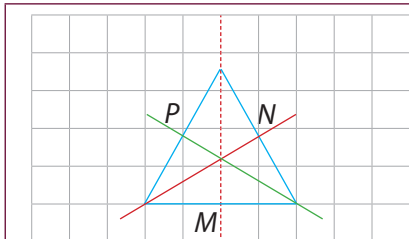
2. Dreptele reprezentate nu mai sunt axe de simetrie pentru configurațiile formate din cele două figuri situate de o parte și de alta a drepte.

3. Pentru configurația de la b) există axă de simetrie, dar aceasta este diferită de dreapta reprezentată.

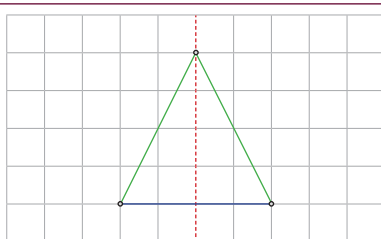
O figură geometrică are *axă de simetrie* dacă există o dreaptă după care să ne putem imagina îndoirea planului astfel încât *cele două părți ale figurii*, situate în cele două semiplane delimitate de această dreaptă, să fie congruente (să coincidă prin suprapunere).

Există figuri care nu au axă de simetrie, dar există și figuri care au mai multe axe de simetrie, uneori chiar o infinitate.

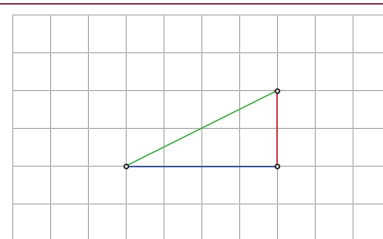
Să urmărim caroiajul și să observăm axele de simetrie ale triunghiurilor reprezentate mai jos.



Triunghiul are toate laturile congruente. Acest triunghi are *trei* axe de simetrie.

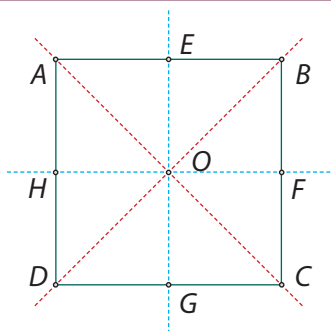


Triunghiul are exact două laturi congruente și *o singură* axă de simetrie.

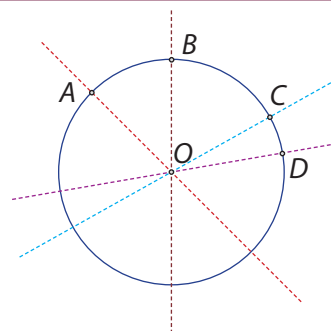


Triunghiul nu are laturi congruente și *nu are nicio* axă de simetrie.

Pătratul și cercul sunt două figuri geometrice cunoscute, care au mai multe axe de simetrie.



$ABCD$ este pătrat iar E, F, G, H sunt mijloacele laturilor. Dacă îndoim *foaia* (planul) pe care este reprezentat *pătratul* după una dintre dreptele AC, BD, EG, FH , cele două părți ale figurii se vor suprapune perfect, deci cele patru drepte sunt *axe de simetrie* ale pătratului.

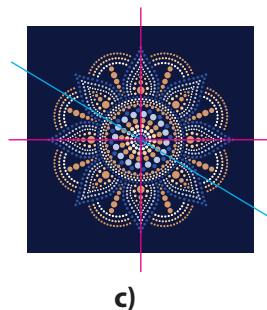
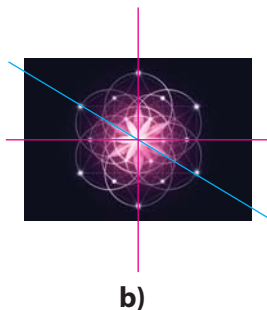
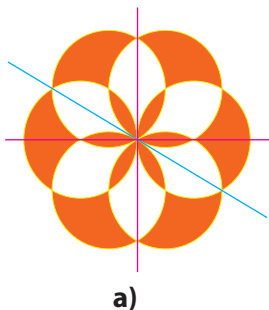


Punctul O este centrul cercului, iar A, B, C, D sunt puncte oarecare pe cerc. Dacă îndoim *foaia* (planul) pe care este reprezentat *cercul* după oricare dintre dreptele, OA, OB, OC, OD sau după oricare altă dreaptă care conține centrul cercului, cele două părți ale cercului se vor suprapune perfect. *Orice dreaptă* care conține centrul cercului este *axă de simetrie* a acestui cerc.

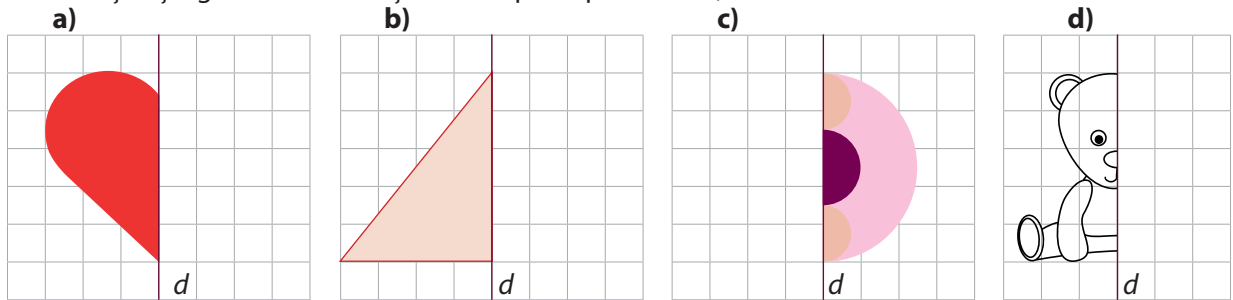


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

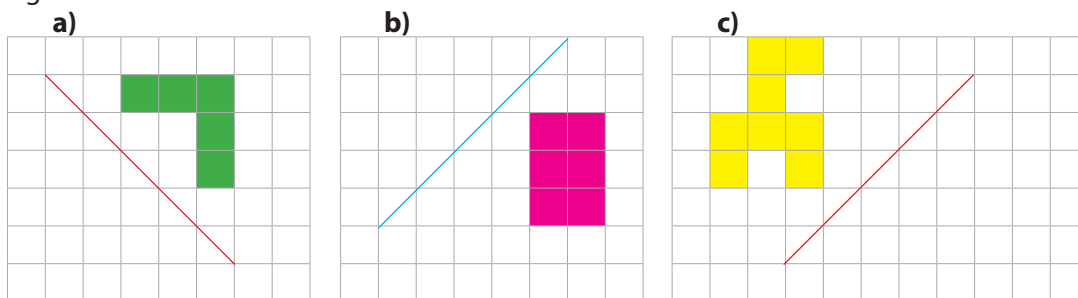
- În imaginile de mai jos sunt trasate câteva axe de simetrie ale unor reprezentări. Identificați și alte axe de simetrie ale acestora. Precizați numărul axelor de simetrie pentru fiecare.



2. Completați următoarele reprezentări, folosind rețeaua de pătrate a foii caietului de matematică, astfel încât să obțineți figuri simetrice față de dreapta reprezentată, notată d .



3. Desenați pe caietele de matematică simetricele figurilor geometrice reprezentate față de dreapta din imagine.



Minitest

(2 × 20 p)

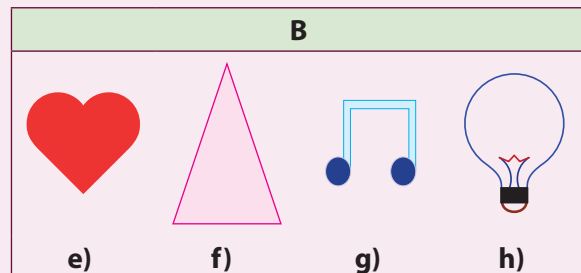
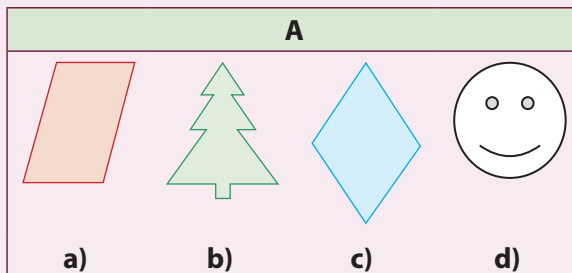
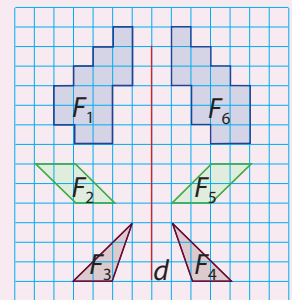
1. Pe o foaie dintr-un caiet de matematică sunt desenate figurile următoare.

Adrian afirmă că $(F_1; F_6)$, $(F_2; F_5)$, $(F_3; F_4)$ reprezintă perechi de figuri congruente.

Alexandra spune că $(F_1; F_6)$, $(F_2; F_5)$, $(F_3; F_4)$ reprezintă perechi de figuri simetrice față de dreapta d .

Stabiliți dacă afirmațiile făcute de cei doi sunt adevărate. Justificați răspunsul dat.

2. Analizați figurile reprezentate în coloana A, apoi pe cele reprezentate în coloana B.



(15p) a) Dintre imaginile din coloana A, figura care *nu are axă de simetrie* este:

A. a); **B.** b); **C.** c); **D.** d).

(15p) b) Dintre imaginile din coloana B, figura care *nu are axă de simetrie* este:

A. e); **B.** f); **C.** g); **D.** h).

(20p) c) Numărul figurilor reprezentate mai sus, care *au 2 axe de simetrie* este:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare / autoevaluare

I. Completați în caseta liberă A, dacă propoziția este adevărată și F, dacă propoziția este falsă.

(4 × 5p)	Propoziția	A/F
	p_1 : Două figuri care prin suprapunere coincid sunt congruente.	
	p_2 : Două unghiuri ascuțite sunt congruente.	
	p_3 : Toate figurile geometrice admit axe de simetrie.	
	p_4 : Există o figură geometrică cu o infinitate de axe de simetrie.	

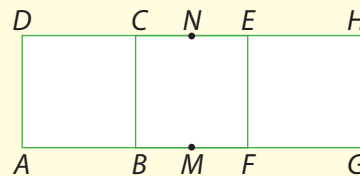
II. Pe foaia de test sau pe caiet, desenați:

- (5p) **a)** punctele A și B , situate pe dreapta d , astfel încât $AB = 4$ cm;
 (5p) **b)** simetricul punctului A față de punctul B , pe care îl notați cu S ;
 (5p) **c)** mijlocul M al segmentului BS ;
 (5p) **d)** punctul N , simetricul punctului M față de punctul S .
 (5p) **e)** Arătați că $AB \equiv BS \equiv MN$.

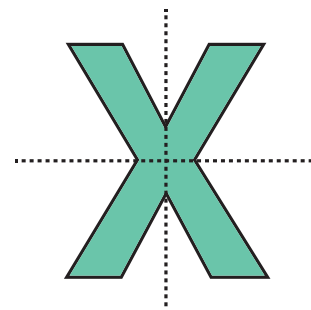
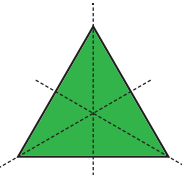
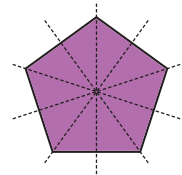
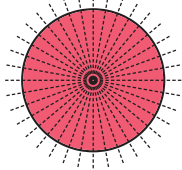
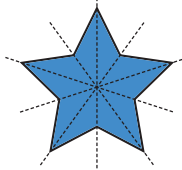
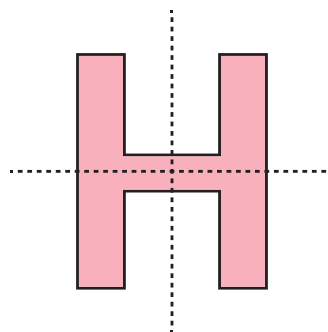
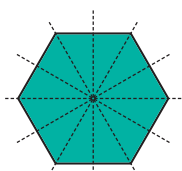
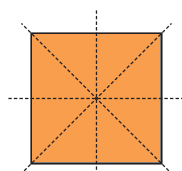
III. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

Pătratele $ABCD$, $BCEF$ și $EFGH$ au interioarele diferite, ca în figura alăturată. Fie M mijlocul segmentului BF și N mijlocul segmentului CE .

- (15p) **a)** Realizați pe caiete un desen ca cel alăturat, folosind rigla și caroiul paginii caietului de matematică.
b) Pe foaia de test sau pe caiete, completați spațiile punctate așa încât să obțineți propoziții adevărate.
 (10p) **b**₁: Un segment congruent cu HD este
 (10p) **b**₂: Simetricul punctului B față de dreapta EF este
 (10p) **b**₃: Pătratele $ABCD$ și $EFGH$ sunt simetrice față de dreapta



Se acordă 10 puncte din oficiu.



4 UNITĂȚI DE MĂSURĂ

L1 Unități de măsură pentru lungime



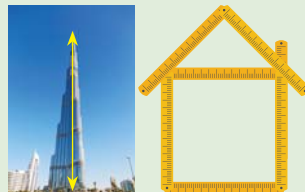
Ne amintim

Știm din clasa a IV-a că:

- Unitatea principală pentru măsurat lungimi este *metrul*.
- O lungime poate fi exprimată în *metri* sau în unul dintre *multiplii* sau *submultiplii* metrului, în funcție de contextul dat.

Imaginile alăturate ilustrează faptul că pentru a preciza înălțimea unui zgârie-nori nu voi folosi aceeași unitate de măsură ca atunci când prezint dimensiunile unui desen pe care l-am realizat pe o foaie de caiet.

- *Multiplii* metrului sunt: *decametrul*, *hectometrul*, *kilometrul*.
- *Submultiplii* metrului sunt: *decimetrul*, *centimetrul*, *milimetrul*.



Observație.

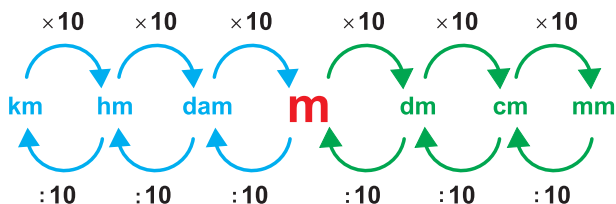
1. Dacă avem de calculat *suma mai multor lungimi*, acestea trebuie să fie exprimate în *aceeași unitate* de măsură.
2. Dacă *lungimea este mare*, se recomandă un *multiplu* al metrului, iar dacă *lungimea este mică*, se recomandă un *submultiplu* al metrului, în scopul de a ușura calculele numerice.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Se impune natural necesitatea exprimării aceleiași lungimi în mai multe unități de măsură, respectiv transformarea dintr-o unitate în alta a unei lungimi.

1. Dacă transformăm o lungime dintr-o unitate într-un *submultiplu* al său, *înmulțim* numărul cu 10, 10^2 , 10^3 ,
2. Dacă transformăm o lungime dintr-o unitate într-un *multiplu* al său, *împărțim* numărul la 10, 10^2 , 10^3 , ... sau *înmulțim* numărul cu 0,1; $0,1^2$; $0,1^3$; ...



Exemplu. Exprimați lungimile de mai jos în mm, cm, dm, m, dam, hm, km. Alegeți exprimarea folosită în practică, în fiecare situație.

1. Distanța dintre casa lui Sorin și școala la care studiază este de 4000 m.
2. Înălțimea Soniei este de 1500 mm.
3. Rigla gradată are 3 dm.

Soluție.

1. $4000 \text{ m} = 400 \text{ dam} = 40 \text{ hm} = \mathbf{4 \text{ km}}$ și $4000 \text{ m} = 40000 \text{ dm} = 400000 \text{ cm} = 4000000 \text{ mm}$.
2. $1500 \text{ mm} = \mathbf{150 \text{ cm}} = 15 \text{ dm} = 1,5 \text{ m} = 0,15 \text{ dam} = 0,015 \text{ hm} = 0,0015 \text{ km}$.
3. $3 \text{ dm} = \mathbf{30 \text{ cm}} = 300 \text{ mm}$ și $3 \text{ dm} = 0,3 \text{ m} = 0,03 \text{ dam} = 0,003 \text{ hm} = 0,0003 \text{ km}$.

$$1 \text{ km} = 10 \text{ hm} = 10^2 \text{ dam} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$$

$$1 \text{ mm} = 1 : 10 \text{ cm} = 1 : 10^2 \text{ dm} = 1 : 10^3 \text{ m} = 1 : 10^4 \text{ dam} = 1 : 10^5 \text{ hm} = 1 : 10^6 \text{ km}$$

$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} = 0,1^2 \text{ dm} = 0,1^3 \text{ m} = 0,1^4 \text{ dam} = 0,1^5 \text{ hm} = 0,1^6 \text{ km}$$





Știm să aplicăm, să identificăm conexiuni

Perimetre

În limbaj cotidian, prin *perimetru* se înțelege lungimea liniei închise care mărginește o suprafață. Pentru *figurile geometrice*, perimetrul este *suma lungimilor segmentelor* care formează figura (suma lungimilor laturilor figurii) și se notează, de regulă, cu P .

Aplicație practică.

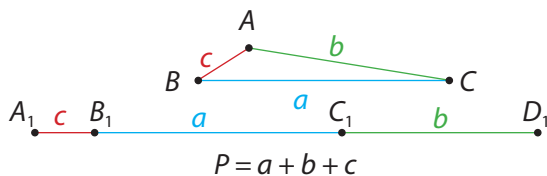
Perimetrul triunghiului. Perimetrul patrulaterului

Materiale necesare: un fir de ață neelastică, caietul de matematică, rigla gradată și un creion ascuțit.

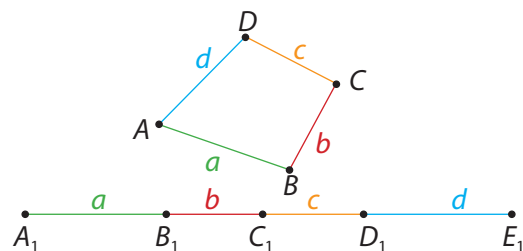
Activitate pe grupe

Grupa I	Grupa a II-a
Perimetrul triunghiului ABC :	Perimetrul patrulaterului $ABCD$:
Pas 1. Desenați pe caiete un triunghi ABC .	Pas 1. Desenați pe caiete un patrulater $ABCD$.
Pas 2. Măsurați fiecare latură a triunghiului, în cm, apoi notați pe caiete lungimile găsite.	Pas 2. Măsurați fiecare latură a patrulaterului, în cm, apoi notați pe caiete lungimile găsite.
Pas 3. Calculați suma lungimilor găsite.	Pas 3. Calculați suma lungimilor găsite.
Pas 4. Fixați un capăt al firului de ață în punctul A și urmați, cu firul întins pe laturile triunghiului, traseul $A - B - C - A$.	Pas 4. Fixați un capăt al firului de ață în punctul A și urmați, cu firul întins pe laturile patrulaterului, traseul $A - B - C - D - A$.
Pas 5. Tăiați firul exact din punctul în care a atins a doua oară punctul A , întindeți-l perfect și măsurați-i lungimea.	Pas 5. Tăiați firul exact din punctul în care a atins a doua oară punctul A , întindeți-l perfect și măsurați-i lungimea.
Pas 6. Comparați lungimea firului cu suma lungimilor laturilor.	Pas 6. Comparați lungimea firului cu suma lungimilor laturilor.

Prezentăm, mai jos, rezultatele pe care le veți obține dacă lucrați cu atenție. Facem abstracție de erori mici de măsurare, care ar putea interveni.



Concluzie. Dacă lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, atunci $P = AB + BC + AC = c + a + b$ sau $P = a + b + c$.



Concluzie. Dacă lungimile laturilor patrulaterului $ABCD$ sunt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, atunci $P = AB + BC + CD + AD = a + b + c + d$.

Perimetrul dreptunghiului $ABCD$	Perimetrul pătratului $ABCD$
Dreptunghiul $ABCD$ are lățimea $AB = l$ și lungimea $BC = L$, exprimate în aceeași unitate de măsură.	Pătratul $ABCD$ are latura de lungime l .
$BC = AD = L; AB = CD = l;$ $P = 2 \cdot L + 2 \cdot l = 2 \cdot (L + l)$	$AB = BC = CD = AD = l.$ $P = 4 \cdot l$

Observație. Două figuri geometrice congruente au același perimetru.



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Scrieți *unitatea potrivită* pentru a măsura:

 - lungimea unui creion;
 - înălțimea școlii în care învățați;
 - grosimea unei mine de creion;
 - distanța de la Pământ la Lună.
- Exprimați în metri următoarele lungimi:

 - 3 km;
 - 52 dam;
 - 0,38 hm;
 - 100 cm;
 - 17000 mm;
 - 60,5 dm.
- Exprimați în milimetri lungimile:

 - 5 m;
 - 2,36 dm;
 - 5,87 cm;
 - 0,06 dam;
 - 0,009 hm;
 - 1 km.
- Calculați, pe caiete:

 - $40 \text{ dm} + 1400 \text{ cm} + 0,5 \text{ dam} = \dots \text{ m}.$
 - $7,23 \text{ km} + 1,25 \text{ hm} + 3650 \text{ dm} = \dots \text{ dam}.$
 - $0,74 \text{ dam} + 4300 \text{ mm} + 0,58 \text{ m} = \dots \text{ cm}.$
- Transformați în unitățile indicate și completați pe caiete rezultatele:

 - $2,43 \text{ m} = \dots \text{ cm};$
 - $0,392 \text{ dam} = \dots \text{ dm};$
 - $\frac{1}{4} \text{ km} = \dots \text{ m};$
- Calculați:

 - $1,35 \text{ dam} - 7,5 \text{ m} = \dots \text{ dm};$
 - $10 \text{ hm} - 40 \frac{1}{2} \text{ dam} = \dots \text{ km}.$
- Efectuați calculele și scrieți rezultatul, pe caiete, în unitatea de măsură indicată:

 - $36 \text{ km} + 530 \text{ hm} = \dots \text{ dam};$
 - $191 \text{ dm} - 15,4 \text{ m} = \dots \text{ cm};$
 - $(0,04 \cdot 10^4) \text{ m} = \dots \text{ km};$
 - $(0,1234 \cdot 10^5) \text{ cm} = \dots \text{ m};$
- Copiați pe caiete și completați în spațiile libere unitatea de măsură corespunzătoare.

 - $7,23 \text{ m} = 0,723 \dots;$
 - $0,485 \text{ dam} = 48,5 \dots;$
 - $864,5 \text{ dm} = 0,8645 \dots;$
 - $0,8 \text{ mm} = 0,00008 \dots;$
- Un iepure face salturi cu lungimea cuprinsă între 129 cm și 151 cm. Aflați numărul maxim și numărul minim de salturi pe care le poate face iepurele pentru a parcurge 50 m.
- Aflați numărul natural n din fiecare egalitate:

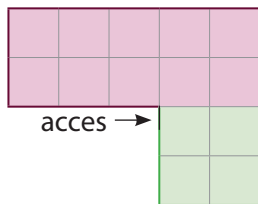
 - $0,4 \text{ km} = (4 \cdot 10^n) \text{ cm};$
 - $5,1 \text{ hm} = (51 \cdot 10^n) \text{ dm};$
 - $0,09 \text{ dm} = (9 : 10^n) \text{ mm}.$
- Comparați lungimile segmentelor AB și CD , știind că:

 - $AB = 13,5 \text{ cm}$ și $CD = 135 \text{ mm};$
 - $AB = 367 \text{ mm}$ și $CD = 3,76 \text{ dm};$
 - $AB = 0,02 \text{ dam}$ și $CD = 210 \text{ mm};$
 - $AB = 453 \text{ mm}$ și $CD = 45,35 \text{ cm}.$
- Călin și Mircea escaladează un munte și ajung în vârf după trei zile, parcurgând același traseu. Călin parcurge succesiv distanțele: $d_1 = 3,9 \text{ km}$, $d_2 = 4500 \text{ m}$, $d_3 = 65,4 \text{ hm}$, Mircea parcurge distanțe egale în cele trei zile.

 - Calculați lungimea traseului și exprimați rezultatul în km.
 - Aflați distanța parcursă de Mircea în fiecare dintre cele trei zile.

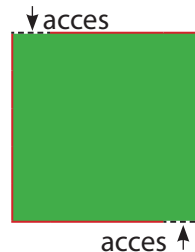


13. Imaginea următoare, obținută prin alăturarea unui dreptunghi și a unui pătrat, reprezintă schița (modelarea geometrică) a grădinii bunicilor Soniei. Bunicul vrea să împrejmuiască grădina. Pentru a cumpăra materialele necesare, trebuie să știe ce lungime va avea gardul. Sonia și prietenul ei Felix au măsurat cu ruleta două laturi alăturate ale dreptunghiului. Una dintre ele are 15,7 m, iar cealaltă are 39,25 m. Calculați lungimea totală a gardului (inclusiv poarta de acces).



14. Locul de joacă din cartier este împrejmuیت cu un gard format din 36 panouri, de câte 3 m fiecare. Acesta este prevăzut cu două căi de acces, de 6 m fiecare.

- Calculați perimetrul terenului de joacă și lungimea gardului.
- Știind că terenul are formă de pătrat, calculați lungimea laturii acestuia.



Minitest

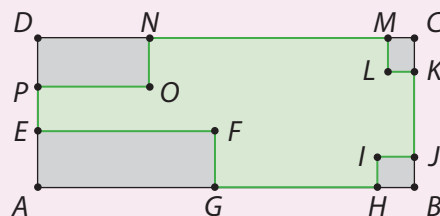
1. Exprimați în unitatea de măsură cerută și scrieți rezultatele pe foaia de lucru.

(15p) a) $\frac{1}{2} \text{ m} = \dots \text{ cm};$

(15p) b) $\frac{1}{4} \text{ km} = \dots \text{ m};$

(15p) c) $\frac{29}{100} \text{ dam} = \dots \text{ dm}.$

(15p) 2. Un teren de forma unui dreptunghi este împrejmuیت cu gard. Proprietarul decide ca în fiecare colț al terenului, să plaseze câte o platformă cu baza dreptunghi, având laturile paralele cu laturile terenului, iar restul terenului să rămână spațiu verde. Decideți dacă suprafața care a rămas spațiu verde poate fi împrejmuیتă cu gardul cu care era înconjurat terenul.



(30p) 3. Folosind datele înscrise pe hartă, calculați distanțele rutiere Pitești – Giurgiu și Brașov – Călugăreni.



Se acordă 10 puncte din oficiu.



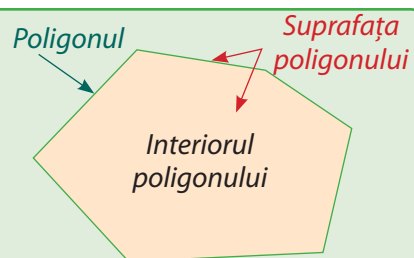
L2 Unități de măsură pentru arie



Ne amintim

Punctele *interioare* unui poligon, împreună cu punctele situate *pe poligon* formează *suprafața poligonului*. Ne propunem să găsim o *măsură* a suprafețelor poligonale, pe care o vom numi *arie*.

- Unitatea principală de măsură pentru arii este *metrul pătrat*.
- Aria unei suprafețe poate fi exprimată în *metri pătrați* sau în unul dintre *multiplii* sau *submultiplii* metrului pătrat, în funcție de contextul dat.
- *Multiplii* metrului pătrat sunt: *decametrul pătrat*, *hectometrul pătrat*, *kilometrul pătrat*.
- *Submultiplii* metrului pătrat sunt: *decimetrul pătrat*, *centimetrul pătrat*, *milimetrul pătrat*.



Observație.

1. Dacă avem de calculat *suma mai multor arii*, acestea trebuie să fie exprimate în *aceeași unitate* de măsură.
2. Dacă *suprafața* este foarte *mare*, se recomandă un *multiplu* al metrului pătrat, iar dacă *suprafața* este *mică*, se recomandă un *submultiplu* al metrului pătrat, cu scopul de a ușura calculele numerice.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

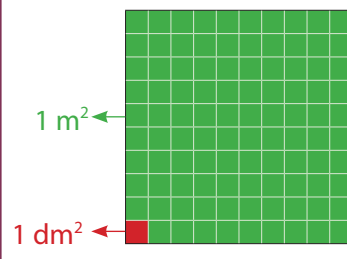
Vom numi *unitate de arie* suprafața unui pătrat care are latura de lungime o *unitate de lungime*.

Suprafața pătratului cu lungime 1 m se numește *metru pătrat*, se notează 1 m^2 și reprezintă *unitatea de arie* standard.

Suprafața pătratului cu lungime 1 dm se numește *decimetru pătrat* și se notează 1 dm^2 .

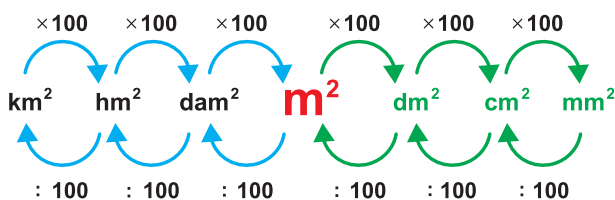
Imaginea alăturată demonstrează că un *metru pătrat* conține 10 rânduri a câte 10 suprafețe de 1 dm^2 , adică 10^2 *decimetri pătrați*.

În mod asemănător, deducem relațiile între m^2 și *multiplii*, respectiv *submultiplii* săi.



Observație. 1. Dacă transformăm o arie dintr-o unitate într-un *submultiplu* al său, *înmulțim* numărul cu 10^2 , 10^4 , 10^6 , ...

2. Dacă transformăm o arie dintr-o unitate într-un *multiplu* al său, *împărțim* numărul la 10^2 , 10^4 , 10^6 , ... sau *înmulțim* numărul cu $0,1^2$; $0,1^4$; $0,1^6$; ...



$$1 \text{ km}^2 = 10^2 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ dam}^2 = 10^6 \text{ m}^2 = 10^8 \text{ dm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2 = 10^{12} \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = (1 : 10^2) \text{ cm}^2 = (1 : 10^4) \text{ dm}^2 = (1 : 10^6) \text{ m}^2 = (1 : 10^8) \text{ dam}^2 = (1 : 10^{10}) \text{ hm}^2 = (1 : 10^{12}) \text{ km}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = 0,1^2 \text{ cm}^2 = 0,1^4 \text{ dm}^2 = 0,1^6 \text{ m}^2 = 0,1^8 \text{ dam}^2 = 0,1^{10} \text{ hm}^2 = 0,1^{12} \text{ km}^2$$

Observație. În țara noastră, din considerente practice, ariile suprafețelor terenurilor agricole se exprimă de multe ori, în *ari*, *hectare* (ha) sau *pogoane*.

$$1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ pogon} = 0,5 \text{ ha} = 5000 \text{ m}^2$$

Aria unui poligon reprezintă o *măsură* a suprafeței sale, exprimată prin numărul *unităților de arie* cu care se poate acoperi perfect suprafața poligonală.



Știm să aplicăm, să identificăm conexiuni

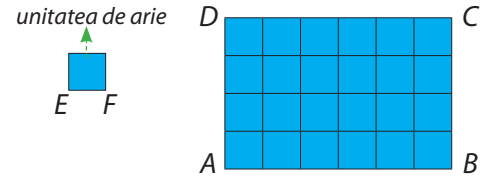
Aria suprafețelor unor figuri geometrice

Fie EF o unitate de lungime.

Suprafața pătratului cu latura EF este *unitate de arie*.

Dreptunghiul $ABCD$ este acoperit de 24 astfel de suprafețe (4 rânduri de câte 6 pătrate), deci aria sa este 24.

Scriem $Aria = 24$ unități de arie.



Observație. Unitatea de lungime se cuprinde în lungimile segmentelor AB și AD de un număr natural de ori (fiecare lungime este exprimată ca *număr natural* de lungimi ale segmentului EF).

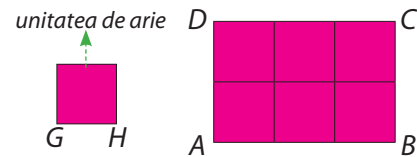
$AB = 6$ unități de lungime și $AD = 4$ unități de lungime și $Aria = AD \cdot AB = 6 \cdot 4 = 24$ (unități de arie).

Considerăm *unitate de arie* suprafața pătratului cu latura GH .

Dreptunghiul $ABCD$ are lungimile laturilor:

$AB = CD = 3 \cdot GH$ și $AD = BC = 2 \cdot GH$.

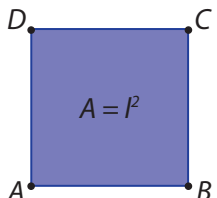
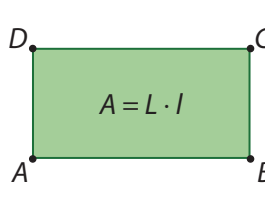
Dreptunghiul $ABCD$ este acoperit de 6 pătrate *unități de arie*, deci $Aria = 6$ unități de arie.



Observație. În exemplul dat, $AB = 3$ unități de lungime, $AD = 2$ unități de lungime și $Aria = AD \cdot AB = 3 \cdot 2 = 6$ (unități de arie).

Pentru a calcula aria unei suprafețe, este necesar ca dimensiunile suprafeței să fie exprimate în *aceeași unitate de lungime*, aria având ca unitate *pătratul cu latura egală cu 1*.

În aceste condiții, deducem formulele:

Aria suprafeței pătratului de latură l		Aria suprafeței dreptunghiului de lungime L și lățime l	
	$AB = BC = CD = AD = l;$ $A = l^2$		$AB = CD = L; BC = AD = l;$ $A = L \cdot l$

Aplicație practică.

Aflarea unei arii folosind caroiajul

Materiale necesare: O foaie cu pătrățele, riglă, foarfecă, creion ascuțit.

Pas 1. Desenați cu ajutorul riglei, ținând cont de caroiajul paginii, figura alăturată.

Pas 2. Aflați, cu ajutorul rețelei de pătrate, aria celor trei suprafețe, evidențiate prin culori diferite, știind că *suprafața unui pătrățel al foii reprezintă unitatea de arie*.

Pas 3. Comparați ariile celor două triunghiuri.

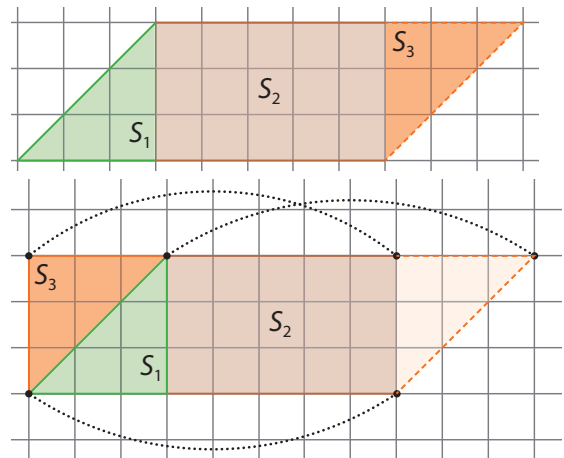
Pas 3. Decupați triunghiul portocaliu și verificați, *prin supra-punere* dacă este congruent cu triunghiul verde.

Pas 4. Așezați triunghiul portocaliu lângă triunghiul verde, ca în imaginea alăturată.

Pas 5. Numiți figura geometrică obținută la pasul 4 și calculați aria acesteia, în *două moduri*;

a) Folosind rezultatele de la pasul 2; b) Folosind formula de calcul pentru aria acestei figuri geometrice.

Pas 6. Aflați aria figurii inițiale, folosind pasul 5.

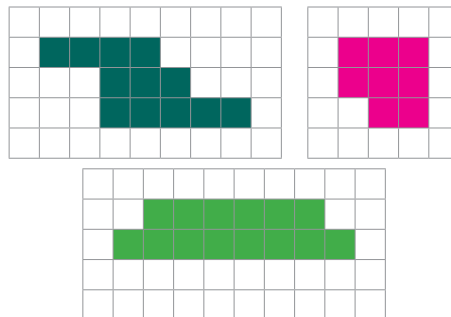




Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Exprimați în metri pătrați:
 - 3 dam^2 ;
 - 1 hm^2 ;
 - $0,25 \text{ km}^2$;
 - 500 dm^2 ; 4 ha ;
 - $80,4 \text{ cm}^2$;
 - 1000 mm^2 ;
 - $4,6 \text{ ari}$;
 - 5 ha .
- Exprimați în centimetri pătrați:
 - 2 m^2 ;
 - $5,48 \text{ dm}^2$;
 - $0,049 \text{ dam}^2$;
 - $0,000005 \text{ ha}$.
- Efectuați calculele și scrieți rezultatele, pe caiete, în unitatea de măsură cerută:
 - $74 \text{ dm}^2 + 2600 \text{ cm}^2 = \dots \text{ m}^2$;
 - $6,03 \text{ dam}^2 + 100000 \text{ dm}^2 = \dots \text{ m}^2$;
 - $5,3 \text{ m}^2 + 4,5 \text{ ari} + 0,021 \text{ ha} = \dots \text{ dm}^2$;
- Completați cu unitatea de măsură potrivită astfel încât să aibă loc egalitățile:
 - $0,96 \text{ km}^2 = 9600 \dots$;
 - $8,3 \text{ hm}^2 = 830 \dots$;
 - $1234 \text{ dm}^2 = 12,34 \dots$;
 - $33445 \text{ m}^2 = 3,3445 \dots$;
 - $0,0492 \text{ ha} = 492 \dots$;
 - $5,8 \text{ ari} = 58000 \dots$
- Un fermier deține un teren agricol cu suprafața $26,4 \text{ ha}$, iar vecinul său deține două parcele, una cu suprafața 1230 ari , cealaltă cu suprafața 139000 m^2 . Precizați care dintre fermieri deține mai mult teren agricol.
- Calculați aria unui pătrat care are latura de lungime:
 - 15 cm ;
 - $0,25 \text{ dm}$;
 - 100 mm .
- Se notează cu L și l , lungimea, respectiv lățimea unui dreptunghi. Calculați aria dreptunghiului pentru fiecare din situațiile:
 - $L = 16 \text{ cm}$, $l = 5 \text{ cm}$;
 - $L = 36 \text{ cm}$ și $L = l + 16 \text{ cm}$.
- Aflați aria unui pătrat, știind că perimetrul său este 1 m .

- Perimetrul și aria unui pătrat se exprimă în cm , respectiv cm^2 , prin același număr.
 - Aflați lungimea laturii pătratului.
 - Aflați perimetrul și aria pătratului.
- Podeaua sălii de mese a unei școli se acoperă cu plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 50 cm .
 - Calculați aria unei plăci de gresie și exprimați rezultatul în metri pătrați.
 - Aflați numărul plăcilor de gresie de care este nevoie, știind că sala are formă dreptunghiulară cu dimensiunile 18 m , respectiv 12 m .
- Calculați ariile suprafețelor colorate, știind că sunt reprezentate într-o rețea de pătrate, fiecare pătrat având latura de 1 cm .



- Tabloul Soniei are dimensiunile 36 cm și 27 cm . Acesta este pictat pe o suprafață dreptunghiulară și este încadrat cu un *passepapout* (o fâșie de carton colorat) cu lățimea de $2,5 \text{ cm}$.



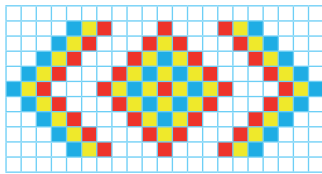
- Calculați dimensiunile suprafeței pictate.
- Calculați aria întregului tablou.
- Calculați aria suprafeței fâșiei din jurul picturii.



13. Pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $MNPQ$ au aceeași arie. Dacă notăm cu p latura pătratului și cu L , respectiv l lungimea și lățimea dreptunghiului, atunci aflați datele care lipsesc din tabelul următor:

	a)	b)	c)	d)	f)
p	9 cm	4 cm			
L		8 cm	32 cm		16 cm
l	3 cm			3 cm	4 cm
A			64 cm^2	36 cm^2	

14. Observați desenul de mai jos. El reprezintă schița unui model realizat de fetele de la atelierul de țesut.



Fetele vor țese un covor în care vor repeta de trei ori modelul de mai sus.

Știind că fiecare pătrățel din imagine reprezintă un pătrat cu latura de 2 cm de pe suprafața covorului, aflați suprafața fiecărei zone colorate cu roșu, cu galben, respectiv cu albastru.

15. Terasa casei lui Daniel este plasată pe o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile 4,24 m și 2,84 m. Aflați câte dale în formă de pătrat cu lungimea laturii de 4 cm sunt necesare pentru a acoperi această terasă.



16. Dreptunghiul $ABCD$ are lățimea de patru ori mai mică decât lungimea, iar perimetrul său este 506 cm. Dreptunghiul $MATE$ are lungimea de două ori mai mare decât cea a dreptunghiului $ABCD$, iar lățimea sa este de trei ori mai mare decât a primului dreptunghi.

- a) Aflați dimensiunile fiecărui dreptunghi.
b) Aflați aria pentru fiecare din cele două dreptunghiuri.
c) Decideți care dreptunghi are aria mai mare și calculați de câte ori este mai mare.

17. Am micșorat de patru ori lungimea unui dreptunghi și de trei ori lățimea acestuia. Am obținut astfel un pătrat cu perimetrul 20 cm.

- a) Calculați aria dreptunghiului.
b) Calculați de câte ori este mai mică aria pătratului decât cea a dreptunghiului.



Minitest

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

(15p) a) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima aria unei coli de hârtie A4 este:

- A. centimetrul pătrat; B. metrul pătrat;
C. hectometrul pătrat; D. kilometrul pătrat.

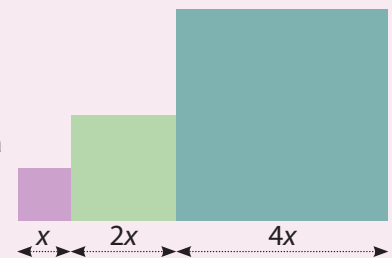
(35p) b) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima suprafața unui continent este:

- A. milimetrul pătrat; B. metrul pătrat;
C. decimetrul pătrat; D. kilometrul pătrat.

2. În figura alăturată sunt reprezentate trei suprafețe pătratice, cea din mijloc având aria 100 cm^2 .

(25p) a) Determinați lungimile laturilor celor trei pătrate.

(25p) b) Calculați suprafața totală acoperită de cele trei pătrate.



Se acordă 10 puncte din oficiu.

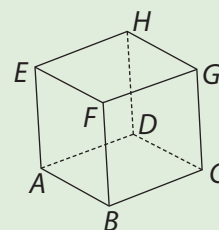
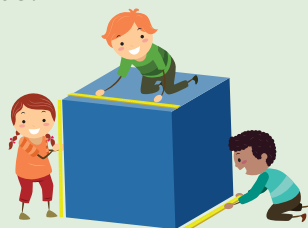


L3 Unități de măsură pentru volum



Ne amintim

- Unitatea principală de măsură pentru volum este *metrul cub*.
- Volumul unui corp poate fi exprimat în *metri cubi* sau în unul dintre *multiplii* sau *submultiplii* metrului cub, în funcție de contextul dat.
- *Multiplii* metrului cub sunt: *decametrul cub*, *hectometrul cub*, *kilometrul cub*.
- *Submultiplii* metrului cub sunt: *decimetrul cub*, *centimetrul cub*, *milimetrul cub*.



Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Volumul unui cub cu latura de lungime *o unitate de lungime* se numește *unitate de volum*.

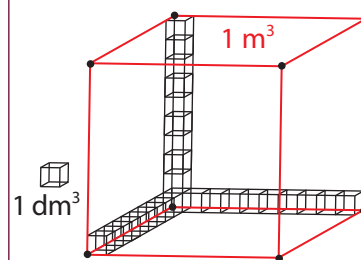
Unitatea standard pentru volum este *metrul cub*, adică volumul unui *cub* cu latura de 1 m, notată cu 1 m^3 .

Să considerăm ca *unitate de volum* 1 dm^3 , adică un cub cu latura de 1 dm.

Pentru a construi cubul cu latura de 1 m care se numește *metru cub* și se notează 1 m^3 , ținem cont de relația

$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ și deducem că avem nevoie de 10 straturi a câte $10 \cdot 10$ cuburi de 1 dm^3 . În concluzie, $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3$.

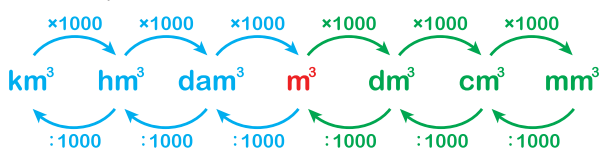
În mod asemănător, deducem relațiile dintre celelalte unități de volum.



Observații.

1. Dacă transformăm un volum dintr-o unitate într-un *submultiplu* al său, *înmulțim* numărul cu $10^3, 10^6, 10^9, \dots$

2. Dacă transformăm un volum dintr-o unitate într-un *multiplu* al său, *împărțim* numărul la $10^3, 10^6, 10^9, \dots$ sau *înmulțim* numărul cu $0,1^3; 0,1^6; 0,1^9; \dots$



Exemple.

$$12 \text{ m}^3 = 12 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = 12 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 = 12 \cdot 10^9 \text{ mm}^3;$$

$$12 \text{ m}^3 = 12 \cdot 0,1^3 \text{ dam}^3 = 12 \cdot 0,1^6 \text{ hm}^3 = 12 \cdot 0,1^9 \text{ km}^3;$$

$$12 \text{ m}^3 = \frac{12}{10^3} \text{ dam}^3 = \frac{12}{10^6} \text{ hm}^3 = \frac{12}{10^9} \text{ km}^3.$$

$$1 \text{ km}^3 = 10^3 \text{ hm}^3 = 10^6 \text{ dam}^3 = 10^9 \text{ m}^3 = 10^{12} \text{ dm}^3 = 10^{15} \text{ cm}^3 = 10^{18} \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ mm}^3 = 1 : 10^3 \text{ cm}^3 = 1 : 10^6 \text{ dm}^3 = 1 : 10^9 \text{ m}^3 = 1 : 10^{12} \text{ dam}^3 = 1 : 10^{15} \text{ hm}^3 = 1 : 10^{18} \text{ km}^3$$

$$1 \text{ mm}^3 = 0,1^3 \text{ cm}^3 = 0,1^6 \text{ dm}^3 = 0,1^9 \text{ m}^3 = 0,1^{12} \text{ dam}^3 = 0,1^{15} \text{ hm}^3 = 0,1^{18} \text{ km}^3$$

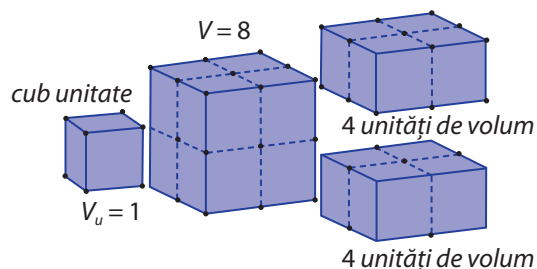
Volumul unor corpuri geometrice

Volumul unui corp geometric reprezintă numărul *unităților de volum* care pot acoperi perfect acest corp.

Considerăm cubul care are latura de două ori mai mare decât latura cubului *unitate de volum*.

Imaginea alăturată ne arată că volumul cubului este 8 *unități de volum*, deoarece se formează *două straturi* a câte $2 \cdot 2$ cuburi *unitate*, adică $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ (*unități de volum*).

Prin urmare, $V = 8$ *unități de volum*.

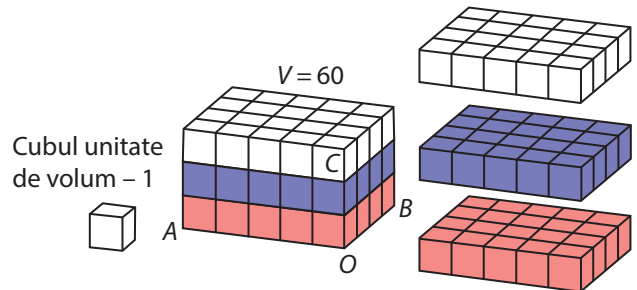


Concluzie. Dacă unitatea de volum este cubul cu latura o unitate de lungime, atunci cubul cu latura de a unități de lungime de același fel are volumul $V = a^3$ unități de volum.

Considerăm ca unitate de volum cubul cu latura de o unitate de lungime.

Paralelipipedul dreptunghic din imagine are dimensiunile $OA = 5$ unități, $OB = 4$ unități și $OC = 3$ unități.

Putem observa 3 straturi de câte $5 \cdot 4$ cuburi unitate, deci $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ (unități de volum).



Concluzie. Dacă unitatea de volum este cubul cu latura o unitate de lungime, atunci paralelipipedul dreptunghic cu dimensiunile a, b, c unități de lungime de același fel, are volumul $V = a \cdot b \cdot c$ (unități de volum).

Spațiul pe care îl ocupă un lichid, deci volumul acestuia se măsoară pornind de la volumul vasului pe care îl umple. Prin urmare, putem vorbi de capacitatea acestui vas.

Pentru a se ști când vorbim despre volumul unui lichid, vom folosi unități de măsură specifice.

Unitatea principală de măsură pentru volumul lichidelor, adică unitatea principală de măsură pentru capacitatea unui vas este litrul.

Litrul este capacitatea unui cub cu muchia de un decimetru. Vom scrie $1 \ell = 1 \text{ dm}^3$.

Multiplii litrului sunt:
decalitrul, hectolitru, kilolitrul.

Submultiplii litrului sunt: decilitrul,
centilitrul, mililitrul.

$$1 \text{ kl} = 10 \text{ hl} = 10^2 \text{ dal} = 10^3 \ell = 10^4 \text{ dl} = 10^5 \text{ cl} = 10^6 \text{ ml}$$

$$1 \text{ ml} = 1 : 10 \text{ cl} = 1 : 10^2 \text{ dl} = 1 : 10^3 \ell = 1 : 10^4 \text{ dal} = 1 : 10^5 \text{ hl} = 1 : 10^6 \text{ kl}$$

$$1 \text{ ml} = 0,1 \text{ cl} = 0,1^2 \text{ dl} = 0,1^3 \ell = 0,1^4 \text{ dal} = 0,1^5 \text{ hl} = 0,1^6 \text{ kl}$$

Exemple. 1. $15 \ell = 15 \cdot 10 \text{ dl} = 15 \cdot 10^2 \text{ cl} = 15 \cdot 10^3 \text{ ml}$;

$$2. 15 \ell = 15 \cdot 0,1 \text{ dal} = 12 \cdot 0,1^2 \text{ hl} = 12 \cdot 0,1^3 \text{ kl} \text{ sau } 15 \ell = \frac{15}{10} \text{ dal} = \frac{15}{10^2} \text{ hl} = \frac{15}{10^3} \text{ kl}$$

Problemă rezolvată.

Aflați volumul unei bile, folosind un vas (o măsură) în care este o cantitate de 500 ml de apă, știind că după introducerea bilei în vas, apa urcă până la 800 ml . Exprimați rezultatul în cm^3 .

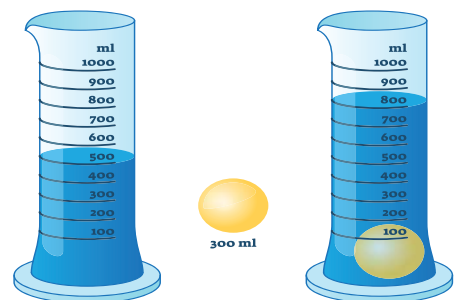
Rezolvare. Introducem bila în vasul cu apă și citim gradația până la care a urcat apa.

Împreună cu bila, lichidul ocupă 800 ml , iar fără bilă, acesta ocupă 500 ml .

Rezultă că bila ocupă 300 ml .

$$300 \text{ ml} = 0,3 \ell = 0,3 \text{ dm}^3 = 300 \text{ cm}^3$$

Răspuns. Volumul bilei este 300 cm^3 .



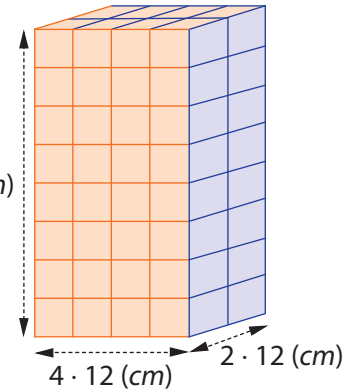


Știm să aplicăm, să identificăm conexiuni

Aplicație.

Într-o cutie în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile 2,4 dm, 48 cm respectiv 9,6 dm, sunt ambalate cutiuțe cu produse cosmetice în formă de cub, cu latura de 12 cm, ca în imaginea alăturată.

- Calculați volumul unei cutiuțe de produse cosmetice, în cm^3 .
- Calculați volumul cutiei în care se ambalează cutiuțele, exprimat în decimetri cubi.
- Aflați câte cutiuțe de produse cosmetice încap într-o astfel de cutie.
- Decideți dacă același număr de cutiuțe ar putea fi ambalate într-o cutie în formă de cub, fără a rămâne spații libere și fără a rămâne cutii neambalate. În caz afirmativ, calculați lungimea muchiei acestui cub.
- Comparați numărul cutiilor obținute la c) cu rezultatul împărțirii volumului paralelipipedului la volumul unei cutiuțe (exprimate în aceeași unitate de volum).



Soluție.

- Cutiuțele au formă de cub cu latura de lungime $l = 12 \text{ cm}$, deci $V_{\text{cutiuță}} = 12^3 = 1728 \text{ (cm}^3\text{)}$.
- Cutia are formă de paralelipiped dreptunghic cu $a = 2,4 \text{ dm}$, $b = 48 \text{ cm} = 4,8 \text{ dm}$, $c = 9,6 \text{ dm}$, deci $V_{\text{cutiuță}} = 2,4 \cdot 4,8 \cdot 9,6 = 110,592 \text{ (dm}^3\text{)}$.
- Vedem câte cutiuțe încap de-a lungul muchiei de dimensiune 2,4 dm. Cum $2,4 : 1,2 = 2$, rezultă că putem așeza câte 2 cutiuțe.
În mod asemănător, de-a lungul muchiei de 4,8 dm, se pot așeza 4 cutiuțe, iar de-a lungul celei de 9,6 dm, se pot așeza 8 cutiuțe. Astfel, se formează 8 straturi a câte $2 \cdot 4$ cutii.
În total, încap $2 \cdot 4 \cdot 8 = 64$ cutiuțe.
- Cum $64 = 4^3$, cele 64 cutiuțe se pot așeza pe 4 straturi a câte $4 \cdot 4$ cutiuțe, adică într-un cub cu muchia de $4 \cdot 12 = 48 \text{ (cm)}$.
- $110,592 \text{ dm}^3 = 110592 \text{ cm}^3$. Atunci, $110592 : 1728 = 64$. Acesta reprezintă numărul cutiuțelor ambalate.

Observație. Dimensiunile cutiuțelor trebuie să se cuprindă de un număr natural de ori în dimensiunile paralelipipedului dreptunghic.

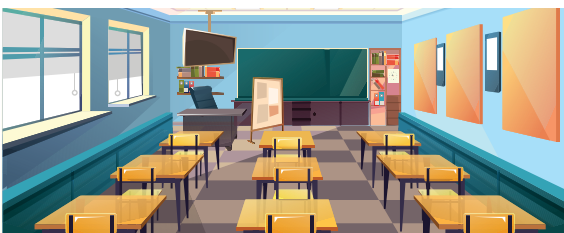


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.

a) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima volumul unei săli de clasă, este:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| A. metrul cub; | C. centimetrul cub; |
| B. decimetrul cub; | D. milimetrul cub. |



b) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima volumul unei cutii de chibrituri, este:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| A. decimetrul cub; | C. decimetrul cub; |
| B. centimetrul cub; | D. metrul cub. |

c) Un metru cub este egal cu:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| A. 100 dm^3 ; | C. 10^3 dm^3 ; |
| B. 10 dm^3 ; | D. 10000 dm^3 . |

d) Unitatea de măsură de o mie de ori mai mare decât milimetrul cub este:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| A. decimetrul cub; | C. metrul cub; |
| B. decimetrul cub; | D. centimetrul cub. |

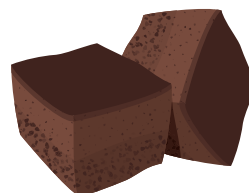
2. Exprimați în centimetri cubi:
a) 1 dm^3 ; **b)** 2 m^3 ;
c) 5000 mm^3 ; **d)** $0,05 \text{ m}^3$;
e) $2,31 \text{ dm}^3$; **f)** $20,2 \text{ mm}^3$.
3. Efectuați următoarele transformări:
a) $4,6 \text{ hm}^3 = \dots \text{ dam}^3 = \dots \text{ m}^3$;
b) $1000 \text{ m}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ dam}^3$;
c) $10^6 \text{ cm}^3 = \dots \text{ dm}^3 = \dots \text{ m}^3$.
4. Efectuați următoarele calcule:
a) $5,4 \text{ dam}^3 + 0,008 \text{ hm}^3 - 200000 \text{ dm}^3 = \dots \text{ m}^3$
b) $0,8 \text{ m}^3 - 720 \text{ dm}^3 + 300000 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3$.
5. Comparați volumele:
a) $1,5 \text{ m}^3$ cu 500 dm^3 ;
b) $31\ 000 \text{ dm}^3$ cu $0,031 \text{ dam}^3$;
c) 1 km^3 cu 10^2 hm^3 ;
d) $8,7 \text{ dm}^3$ cu 870 cm^3 ;
e) $0,003 \text{ cm}^3$ cu 30 mm^3 ;
f) $2\frac{3}{5} \text{ dm}^3$ cu 2500 cm^3 .
6. Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.
Dacă volumul unui cub este 216 dm^3 , atunci muchia cubului are lungimea:
A. 6 dm ; **C.** 8 dm ;
B. 9 dm ; **D.** 12 dm .
7. O cutie în forma unui paralelipiped dreptunghic, are lungimea 32 cm , lățimea 25 cm și volumul 5840 cm^3 . Înălțimea cutiei este:
A. $6,2 \text{ cm}$; **C.** $7,6 \text{ cm}$;
B. $7,3 \text{ cm}$; **D.** $8,2 \text{ cm}$.



8. Într-un vas, când acesta este plin, intră 8 litri apă. În vas se introduce un obiect cu volumul 100 cm^3 . Aflați câți litri de apă mai rămân în vas.
9. Calculați lungimea muchiei unui cub, știind că volumul lui este:
a) 125 cm^3 ; **b)** 1000 dm^3 ; **c)** $0,064 \text{ m}^3$.

10. Dintr-o prăjitură se taie 12 bucăți în formă cubică, fiecare având muchia de 5 cm . Se știe că cele 12 bucăți reprezintă 30% din volumul întregii prăjituri și cântăresc împreună 420 g .

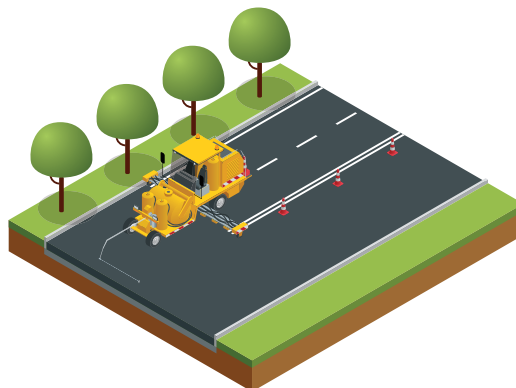
- a)** Aflați cât a cântărit prăjitura întreagă.
b) Calculați câte bucăți de prăjitură se pot pune într-o caserolă în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile interioare 15 cm , 10 cm , 8 cm .



11. La construirea unui zid, se folosesc 600 cărămizi și mortar. Dimensiunile unei cărămizi sunt $L = 25 \text{ cm}$, $l = 15 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$. Știind că zidul ocupă $3,5 \text{ m}^3$, calculați volumul mortarului folosit.



12. Se asfaltează strada pe care locuiește Emilia. Lungimea străzii este 125 m , lățimea străzii este 8 m , iar stratul de asfalt are grosimea 15 cm . Calculați volumul materialului folosit.





Minitest

1. Alegeți varianta corectă de răspuns. Doar un răspuns este corect.

(15p) a) Unitatea de măsură potrivită pentru a exprima volumul unei cutii de bomboane, este:
A. milimetrul cub; B. centimetrul cub; C. decimetrul cub; D. metrul cub.

(15p) b) Un decimetru cub este egal cu:
A. 10 cm^3 ; B. 10 dm^3 ; C. 10^3 cm^3 ; D. $10\,000 \text{ cm}^3$.

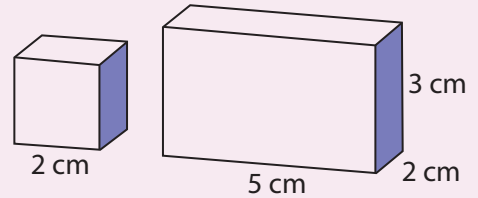
(15p) c) Unitatea de măsură de o mie de ori mai mare decât centimetrul cub este:
A. milimetrul cub; B. decimetrul cub; C. metrul cub; D. decimetrul cub.

(15p) 2. Efectuați calculele și exprimați rezultatul în metri cubi.
 $500 \cdot 4,5 \text{ dm}^3 + 32,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 - 0,021 \text{ dam}^3$.

3. În desenul alăturat sunt reprezentate un cub și un paralelipiped dreptunghic.

(15p) a) Calculați volumele celor două corpuri.

(15p) b) Aflați de câte ori este mai mare volumul paralelipipedului decât volumul cubului.



Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare

Subiectul I

Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

(5p) 1. $30 \text{ dam} + 3000 \text{ cm} = \dots \text{ m}$.

(5p) 2. $0,045 \text{ km} + 10^4 \text{ cm} - 56 \text{ m} = \dots \text{ dam}$.

(5p) 3. $250 \text{ dm}^2 + 0,00005 \text{ ha} = \dots \text{ m}^2$.

(5p) 4. $0,4 \text{ dm}^3 + 4400 \text{ mm}^3 = \dots \text{ cm}^3$.

Subiectul al II-lea

Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

(5p) 1. Perimetrul unui dreptunghi cu dimensiunile 56 cm și $3,2 \text{ dm}$ este:

A. 166 cm ; B. $17,6 \text{ dm}$; C. $1,67 \text{ m}$; D. 88 cm .

(5p) 2. Un apartament are trei camere cu suprafețele 14 m^2 ; $15,6 \text{ m}^2$ respectiv $0,18 \text{ dam}^2$. În cele trei camere, se montează parchet. Știind că un metru pătrat de parchet costă $62,50 \text{ lei}$, atunci suma plătită pentru toată suprafața este:

A. 2925 lei ; B. 2950 lei ; C. 2975 lei ; D. 3025 lei .

(5p) 3. Volumul unei cutii cu lungimea 30 cm și lățimea 20 cm este 15000 cm^3 . Înălțimea cutiei este:

A. 25 cm ; B. 15 cm ; C. 35 cm ; D. 18 cm .

Subiectul al III-lea

Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

1. Un pătrat și un dreptunghi au perimetrele egale. Se știe că pătratul are aria 144 cm^2 , iar lungimea dreptunghiului este cu $0,02 \text{ m}$ mai mare decât lățimea. Aflați:

(15p) a) latura pătratului și perimetrul dreptunghiului;

(15p) b) dimensiunile și aria dreptunghiului.

2. Un teren agricol de 9 ha este împărțit în două parcele, una dintre ele având aria $36\,000 \text{ m}^2$. Din parcela cu suprafața mai mare, se ară 20% , iar din cealaltă parcelă se ară 30% .

(15p) a) Precizați dacă suprafețele arate sunt egale.

(10p) b) Calculați aria suprafeței care mai rămâne de arat, în cele două parcele.

Se acordă 10 puncte din oficiu.





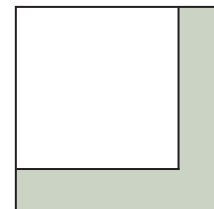
Test de evaluare sumativă

Subiectul I. Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

- (10p) 1. Rezultatul calculului $1 \text{ dam} + 1 \text{ hm} + 1 \text{ km}$, exprimat în metri, este:
A. 111 m; B. 11,1 m; C. 1110 m; D. 1,11 m.
- (10p) 2. Un fermier cumpără două terenuri alăturate, având ariile 0,1 ha, respectiv 5 ari.
Întregul teren are aria:
A. 150 m^2 ; B. 1500 m^2 ; C. 15 m^2 ; D. $15\,000 \text{ m}^2$.
- (10p) 3. Dintr-o coală de hârtie dreptunghiulară cu dimensiunile 20 cm și 15 cm, decupăm un pătrat cu latura 10 cm. Suprafața rămasă are aria:
A. 200 cm^2 ; B. 250 cm^2 ; C. 225 cm^2 ; D. 25 cm^2 .

Subiectul al II-lea. Pe foaia de test scrieți rezolvările complete.

- (10p) 1. Dintr-un pătrat cu perimetrul 120 cm, se decupează o fâșie cu lățimea de 22,5 cm, ca în imaginea alăturată. Calculați aria pătratului rămas.

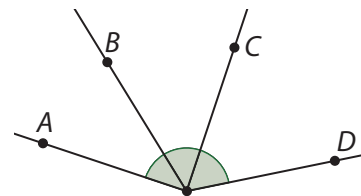


- (10p) 2. Un dreptunghi, care nu este pătrat, s-a format prin alăturarea a patru pătrate cu laturile de aceeași lungime. Suma perimetrelor tuturor pătratelor este 128 cm. Aflați dimensiunile și aria dreptunghiului.

- (15p) 3. Sonia a format un segment, punând cap la cap un bețișor cu lungimea 1 cm, două bețișoare cu lungimea 2 cm și trei bețișoare cu lungimea 3 cm. Știind că mijlocul segmentului format reprezintă punctul de întâlnire a două bețișoare, reprezentați printr-un desen modul în care a aranjat Sonia bețișoarele.



- (10p) 4. Unghiurile AOB , BOC , COD nu au două câte două puncte interioare comune, iar $\sphericalangle AOD = 150^\circ$. Aflați măsurile celor trei unghiuri, știind că $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC - 10^\circ = \sphericalangle COD - 20^\circ$.



- (15p) 5. Florin toarnă 3,2 litri apă într-un vas în formă de cub cu muchia 16 cm.
a) Calculați înălțimea la care urcă apa, știind că vasul stă pe o suprafață orizontală.
b) Aflați câți litri de apă trebuie să adăugăm pentru ca vasul să fie plin.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.





Schemă recapitulativă a capitolului



PROBLEME DE SINTEZĂ

- Liviu se documentează pentru o temă de proiect și citește dintr-o lucrare scrisă în cinci volume, fiecare volum având 100 de pagini. Știind că Liviu începe studiul din volumul al doilea, pagina 48 și se oprește la pagina 81 din volumul al patrulea, aflați numărul paginilor pe care le-a citit Liviu documentându-se pentru proiect.
- Comparați numerele:
a) $\overline{x3}$ cu 73; b) 764 cu $\overline{xx4}$.
- Cu primele 202 numere naturale nenule, scrie în ordine crescătoare, formăm numărul $B = 1234567891011 \dots 201202$
a) Aflați numărul cifrelor numărului B .
b) Precizați cifra de pe locul 202.
- Calculați, folosind factorul comun:
 $24 \cdot 15 + 56 \cdot 69 + 15 \cdot 32 + 56 \cdot 16$.
- Precizați câte numere cuprinse între 100 și 200 se împart exact la 7. Aflați suma acestor numere.
- Determinați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 9 dau câtul 13.
- Irina efectuează împărțirea $10^{20} : 5^{20}$ și obține rezultatul 1234678. Argumentați, fără a face calculul, că rezultatul obținut de Irina este greșit.
- Andrei afirmă că numărul $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 69$ este divizibil cu 5^n , oricare ar fi numărul natural $n < 10$. Precizați dacă Andrei are dreptate, justificând răspunsul dat.
- Se consideră numărul $a = \overline{38x} + \overline{3x8} + \overline{38x}$.
a) Arătați că numărul a este divizibil cu 2, oricare ar fi cifra x .
b) Aflați cifra x , pentru care numărul a este divizibil cu 10.
- Fie șirul 3, 7, 11, 15, ..., 99.
a) Scrieți termenii șirului care sunt numere divizibile cu 5.
b) Precizați dacă șirul conține pătrate perfecte.
- Fie numerele $a = 2^{n+4} \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+1}$ și $b = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+2}$, n număr natural.
a) Arătați că $a : b$, oricare ar fi numărul natural n .
b) Determinați numărul n , știind că $a = b + 1224$.
- Dana și Dan sunt gemeni, iar suma dintre vârsta mamei lor și vârstele lor este 40 de ani. Peste douăzeci de ani, vârsta mamei va fi egală cu suma vârstelor gemenilor. Aflați ce vârstă are fiecare în prezent.
- Din localitățile A și B pleacă două mobile unul spre celălalt. Primul mobil pleacă din A la ora 10 și se deplasează cu viteza medie de 50 km/h, al doilea mobil pleacă din B la ora 11 și se deplasează cu viteza medie de 40 km/h. Știind că la ora 12 se află la 180 km unul față de altul și că nu s-au întâlnit până la această oră, determinați:
a) ora la care cele două mobile se vor întâlni.
b) distanța dintre localitățile A și B .
- Într-o școală sunt cinci clase a V-a, fiecare clasă având numărul de elevi cuprins între 20 și 29. În două dintre clase, numărul fetelor este cu trei mai mare decât numărul băieților, iar în celelalte clase numărul băieților este cu unu mai mare decât numărul fetelor.
a) Aflați numărul minim și numărul maxim al elevilor claselor a V-a din această școală.
b) Dacă în școală învață 105 elevi de clasa a V-a, aflați numărul fetelor și numărul băieților din fiecare clasă.
- Într-o urnă sunt bile roșii, bile albastre și bile verzi. Aflați numărul bilelor de fiecare culoare, știind că 17 bile nu sunt bile roșii, 19 bile nu sunt bile albastre și 22 de bile nu sunt bile verzi.
- Se știe că $a + b = 12$, $b + c = 122$, $c + a = 112$.
Calculați $\frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c$.
- Aflați numărul necunoscut din fiecare egalitate, folosind operațiile cu puteri și metoda mersului invers.
a) $x + 2^{13} \cdot 2^9 = 3^3$;
b) $y^4 : y^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$;
c) $\frac{81}{z} = \frac{3^3}{2}$.

18. Se consideră numerele

$$m = (2^6 : 4^3 + 6^{12} : 36^6) : \left(\frac{1}{2}\right)^4 \text{ și}$$

$$p = (3 \cdot 9^3 \cdot 27^3 : 81^4 + 3)^5.$$

a) Aflați numerele m și n .

b) Arătați că $m^2 + p = 2^{11}$.

c) Precizați dacă $\frac{m+p}{33}$ este număr natural.

19. Arătați că numărul

$$n = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \dots + \frac{51}{50}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50}\right)$$

este pătratul unui număr natural.

20. Să se efectueze:

a) $3,5 + 2,07 : 3;$

b) $5,2 : 0,2 + (0,2)^3 : 0,01;$

c) $4,6 \cdot 7,5 - 0,0287 \cdot 10^3.$

21. Luna și Pământul cântăresc împreună, aproximativ $6,046 \cdot 10^{24}$ kg. Știind că masa Pământului este aproximativ $5,973 \cdot 10^{24}$ kg, calculați masa Lunii.



22. Arătați că $(1,89 + 3,11)^{11} : (6,24 - 1,24)^9 < \frac{51}{2}$.

23. Într-un depozit de fructe, sunt 72 de lăzi cu mere, fiecare ladă plină cântărind 12,5 kg. Aflați cât cântărește întreaga cantitate de mere, dacă o ladă goală cântărește 1,25 kg.

24. Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare, în această ordine.

a) Demonstrați că $AD + BE = AE + BD$.

b) Dacă $AB \equiv CD$ și $BC \equiv DE$, demonstrați că $AC \equiv CE$.

25. Pe dreapta d , se consideră punctele A, B, C, D astfel încât $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 7$ cm, $AD = 11$ cm.

a) Precizați ordinea punctelor pe dreapta d .

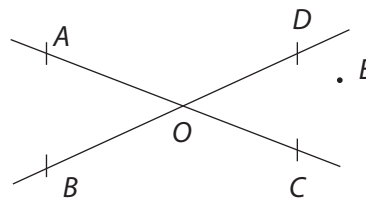
b) Calculați lungimile segmentelor BD și CD .

26. Un dreptunghi are lungimea egală cu 13,2 cm și lățimea de 3 ori mai mică. Aflați:

a) lățimea dreptunghiului;

b) perimetrul și aria dreptunghiului.

27. Analizați figura geometrică următoare și completați în căsuța liberă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.



Propoziția	A/F
p_1 : Punctele B, O, E sunt coliniare.	
p_2 : Punctul O aparține segmentului BD .	
p_3 : Semidreptele OA și OC sunt opuse.	
p_4 : Punctul E aparține interiorului unghiului COD .	
p_5 : Unghiul AOD este ascuțit.	

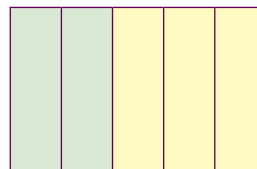
28. Prin punctul O , vârful unghiului drept $\sphericalangle AOB$, se trasează o dreaptă MN , punctele M și N fiind situate de o parte și de alta a punctului O , $\sphericalangle AOM = u^\circ$.

a) Realizați un desen pentru $u = 35$ și calculați măsura unghiului $\sphericalangle BON$. Identificați toate cazurile posibile.

b) Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle BON$ știind că sunt congruente.

29. Proprietarul unui teren agricol în formă de dreptunghi cultivă pe $\frac{2}{5}$ din suprafață grâu, iar pe restul suprafeței, porumb. Cele două suprafețe cultivate sunt dreptunghiulare.

Perimetrul suprafeței cultivate cu grâu este de 140 m, iar perimetrul suprafeței cultivate cu porumb este de 180 m.



a) Aflați dimensiunile întregului teren.

b) Exprimați în hectare suprafețele cultivate cu grâu respectiv cu porumb.

30. Pentru a pune faianță pe un perete dreptunghiular cu înălțimea 2,4 m, s-au adus șapte cutii de faianță, în fiecare cutie fiind 12 plăci în formă de pătrat cu latura 40 cm. S-au folosit plăcile din șase cutii și 25% din numărul plăcilor din a șaptea cutie. Calculați lungimea peretelui pe care s-a pus faianță.

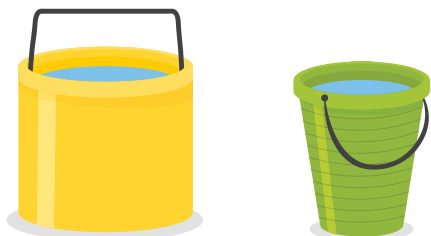
31. Un container în formă de paralelipiped dreptunghic are lungimea 8 m, lățimea 4 m și înălțimea 2,4 m. În container se pun cutii cubice cu latura 40 cm, acestea ocupând 60% din volumul containerului.

- Calculați volumul containerului.
- Aflați numărul cutiilor puse în container.
- Precizați dacă se poate ocupa complet containerul cu cutii cubice cu latura 40 cm.



32. Pentru a umple cu apă un rezervor cu volumul $0,4 \text{ m}^3$, se pot folosi două găleți, una cu capacitatea 16 litri și cealaltă cu capacitatea 20 de litri. Aflați:

- capacitatea rezervorului exprimată în litri;
- de câte ori se poate folosi găleata de 16 litri pentru a umple rezervorul;
- numerele n și m , știind că găleata de 16 litri se folosește de n ori, găleata de 20 litri se folosește de m ori și $n + m = 23$.



33. Într-o ladă în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 150 cm, lățimea 80 cm și înălțimea 40 cm, se pun $0,36 \text{ m}^3$ nisip care se nivelează peste tot la aceeași înălțime.

- Aflați la ce înălțime ajunge nisipul.
- Calculați câți dam^3 de nisip trebuie adăugați pentru ca lada să fie plină.



34. Arătați că

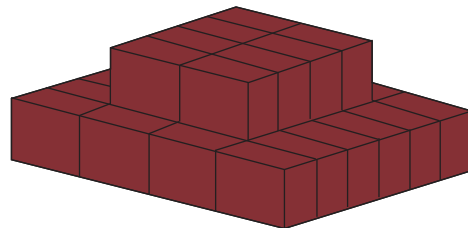
$$A = \left[\left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]^2 : \frac{27}{125} + 2 \frac{2}{5} \text{ este număr natural.}$$

35. Determinați numărul natural n din egalitățile:

$$\text{a) } \left(\frac{4}{5} \right)^n = \frac{16}{25}; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} = \frac{1}{81};$$

$$\text{c) } \left[\left(\frac{25}{4} \right)^n \right]^2 = \frac{5^8}{16^2}.$$

36. Mai multe cărămizi se așază pe două etaje, fiecare etaj sub formă de paralelipiped dreptunghic (desenul următor). Fiecare cărămidă este, de asemenea, în formă de paralelipiped dreptunghic și are dimensiunile $L = 30 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ cm}$.



- Aflați numărul cărămizilor folosite pentru realizarea construcției.
- Calculați volumul construcției.

37. Dintr-o foaie de carton dreptunghiulară cu dimensiunile $L = 52 \text{ cm}$ și $l = 28 \text{ cm}$, se decupează suprafețe pătratice din colțuri, latura fiecărui pătrat fiind de 4 cm, ca în desenul de mai jos. Se îndoaie foaia rezultată după liniile punctate și se construiește o cutie.



- Precizați denumirea corpului geometric corespunzător formei pe care o are cutia și aflați dimensiunile acestuia.
- Calculați volumul cutiei.



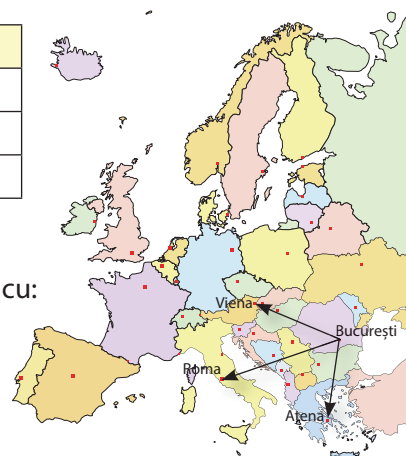
CĂLĂTORIE IMAGINARĂ PRIN EUROPA

„Călătorie imaginară prin Europa” este un proiect care vă propune să descoperiți informații interesante despre trei orașe și trei civilizații care au marcat istoria românilor.

Vom ajunge la Viena, Roma și Atena.

1. Distanțele rutiere dintre București și cele trei capitale europene sunt următoarele:

	Orașe	Distanțe rutiere
București	Viena	1070 km
	Roma	1897 km
	Atena	1156 km



Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

a) Distanța București-Atena este mai mare decât distanța București-Viena cu:

- A. 86 dam; B. 86 hm;
C. 860 dam; D. 860 hm.

b) Parcurgând cele trei distanțe dus-întors am parcurs în total:

- A. 8246 km; B. 8624 km;
C. 8426 km; D. 8264 km.



2. Ajungem la Viena și vom vizita „imaginar”, grădina zoologică.

Este cea mai veche grădină zoologică din lume și printre cele mai moderne și bine amenajate habitate artificiale ale lumii. A fost înființată lângă Palatul Schönbrunn, și a devenit publică în anul 1778. Grădina Zoologică Schönbrunn s-a extins de-a lungul anilor, ajungând la o suprafață cu aria actuală de 17 ha.

Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

a) Exprimată în m^2 , suprafața grădinii zoologice din Viena este:

- A. 170 m^2 ; B. 1700 m^2 ; C. 17 000 m^2 ; D. 170 000 m^2 .

b) Față de parcul palatului Schönbrunn care se extinde pe o suprafață de aproximativ 1,2 km^2 , suprafața grădinii zoologice din Viena este mai mică cu:

- A. 13 ha; B. 5 ha;
C. 130 ha; D. 103 hm^2 .

3. Popasul următor este la Roma, unde, pe lângă alte multe atracții turistice, se poate vedea Columna lui Traian, monument construit din ordinul împăratului Traian, pentru celebrarea victoriei romanilor în războiul cu dacii.

Columna lui Traian are înălțimea de aproximativ 30 de metri.



Alegeți litera care indică varianta corectă. Doar un răspuns este corect.

- a) Exprimată în decimetri, înălțimea construcției este de aproximativ:
A. 3 dm; B. 300 dm; C. 30 dm; D. 3000 dm.
- b) Columna lui Traian conține 18 blocuri masive de marmură, fiecare cântărind aproximativ 40 de tone. Întreaga construcție cântărește:
A. 72 tone; B. 720 tone; C. 7200 tone; D. 18 tone.
- c) Construcția columnei a fost terminată în anul 113 e.n. În anul 2022 avea o vechime de:
A. 1999 ani; B. 1909 ani; C. 1099 ani; D. 1919 ani.
4. Am ajuns la Atena și vom vizita Partenonul. Aflată pe acropola Atenei, dedicată zeiței Atena, este considerată cea mai bună realizare a arhitecturii clasice grecești. Partenonul este un simbol de durată al Greciei antice și al democrației ateniene și este universal considerat ca fiind unul dintre cele mai mari monumente culturale din lume. Dimensiunile la bază ale Partenonului sunt de aproximativ 70 metri lungime, 31 metri lățime și 12 metri înălțime.



Alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

- a) Considerând paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile Partenonului, volumul acestuia este:
A. 26 400 m³; B. 26 600 m³; C. 26 060 m³; D. 26 040 m³.
- b) Un cub are muchia exprimată în metri, printr-un număr natural și are volumul cel mult egal cu volumul Partenonului. Cea mai mare valoare pentru lungimea muchiei cubului este:
A. 29 m; B. 30 m; C. 28 m; D. 31 m.



Test de evaluare/autoevaluare nr. 1

SUBIECTUL I

Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

1.

- (5p) a) Rezultatul calculului $24 \cdot 8 + 224 : 4^2$ este
- (5p) b) Rezultatul calculului $\frac{11}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}$ este
- (5p) c) Rezultatul calculului $1,88 + 0,467 \cdot 10 - 48,5 : 10$ este

2.

- (5p) a) $17 \text{ m} + 2,5 \text{ dam} + 400 \text{ cm} = \dots \text{ m}$.
- (5p) b) Clădirile deținute de o școală ocupă o suprafață cu aria 11000 m^2 , iar curtea școlii are aria $6,35 \text{ ha}$. Atunci, întreaga suprafață deținută de școală este ... ha.
- (5p) c) O cutie în formă de cub cu latura 12 cm are volumul ... dm^3 .

SUBIECTUL AL II – LEA

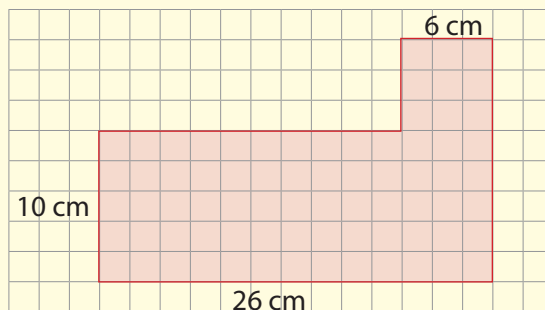
Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1.

- (5p) a) Aflați cifra x astfel încât numărul $A = 76 + \overline{12x}$ să fie divizibil cu 5.
- (5p) b) Calculați suma numerelor prime cuprinse între 40 și 60.
- (5p) c) Suma dintre un număr prim și un număr divizibil cu 10 este 59. Aflați cele două numere.

2. Un grup de excursioniști parcurg două treimi din drum cu autocarul, jumătate din distanța rămasă cu bicicletele și ultimii $8,5 \text{ km}$ pe jos.

- (15p) a) Calculați distanța parcursă cu autocarul și distanța parcursă cu bicicletele.
- (15p) b) Aflați lungimea traseului parcurs de excursioniști.
- (15p) 3. Prin alăturarea unui dreptunghi și a unui pătrat s-a obținut o suprafață ca cea din imaginea alăturată. Calculați perimetrul și aria figurii reprezentate, folosind dimensiunile de pe desen.



Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare/autoevaluare nr. 2

SUBIECTUL I

Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

1.

(5p) a) Rezultatul calculului $31 \cdot 1,9 + 31 \cdot 2,9 + 31 \cdot 5,2$ este

(5p) b) Rezultatul calculului $216 : 6^2 + 6^5 : 6^3$ este

(5p) c) Cel mai mare număr natural, mai mic decât $a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \frac{3}{160}$, este

2.

(5p) a) Suma divizorilor numărului 2^6 este

(5p) b) Cel mai mare divizor comun al numerelor 45 și 80 este

(5p) c) Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 32 este

SUBIECTUL AL II – LEA

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră fracția $f = \frac{3}{11}$. Scrieți:

(10p) a) fracțiile echivalente cu fracția dată, care au suma dintre numărător și numitor mai mică decât 50;

(5p) b) fracția zecimală în care se transformă f ;

(5p) c) suma primelor nouă zecimale ale fracției zecimale în care se transformă f .

2. Doi frați, Florin și George, au pe card suma de 150 lei. Aceștia vor să dăruiască celor 7 prieteni câte o minge. Le-au plăcut mingile de două categorii. Dacă ar cumpăra 3 mingi din prima categorie și 4 mingi din a doua categorie, le-ar mai rămâne pe card 5,50 lei. Dacă ar cumpăra 4 mingi din prima categorie și 3 mingi din a doua categorie, le-ar mai rămâne pe card 7,50 lei.

(10p) a) Calculați prețul unei mingi de fiecare fel.

(10p) b) Verificați dacă le-ar fi ajuns banii pentru a cumpăra toate mingile din categoria mai scumpă.

3. O terasă în formă de dreptunghi are dimensiunile 10 m și 6 m. Terasa este acoperită cu plăci de granit de formă dreptunghiulară, având dimensiunile 0,5 m și 0,3 m.

(5p) a) Aflați aria terasei.

(5p) b) Calculați aria unei plăci de granit.

(10p) c) Precizați dacă se poate face o acoperire a terasei cu plăci de granit, astfel încât plăcile de granit să nu fie tăiate.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru 50 de minute.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Test de evaluare finală/autoevaluare nr. 3

SUBIECTUL I

Completați, pe foaia de test sau pe caiet, spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

1.

- (5p) **a)** Trei frați au împreună 16 ani. Peste șase ani, vor avea împreună ... ani.
 (5p) **b)** Un biciclist parcurge 42 km în 3 ore. Deplasându-se cu aceeași viteză, va parcurge 70 km în ... ore.
 (5p) **c)** Un bazin în formă de cub are latura de 80 cm. Capacitatea bazinului este de ... litri.

2.

- (5p) **a)** Rezultatul calculului $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7}$ este
 (5p) **b)** Rezultatul calculului $1,(6) + 4,5 - 3,8(3)$ este
 (5p) **c)** Diferența dintre cel mai mare număr de forma $\overline{a7b}$, divizibil cu 4 și cel mai mic număr de forma $\overline{7cd}$, divizibil cu 3, este

SUBIECTUL AL II – LEA

Pe foaia de test, sau pe caiet, scrieți rezolvările complete.

1. În pătratul alăturat, suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare diagonală, este aceeași.

- (10p) **a)** Aflați numerele a, b, c .
 (5p) **b)** Arătați că $a^2 < b + c$.
 (5p) **c)** Identificați *pătratul magic* din care a fost obținut pătratul din imagine.

Un pătrat *magic* este format prin aranjarea a n^2 numere *naturale* pe n linii (rânduri) și n coloane, astfel încât toate cele n numere din aceeași linie, sau din aceeași coloană, sau din aceeași diagonală, să aibă aceeași sumă.

$\frac{1}{5}$	a	$\frac{3}{5}$
0,9	0,5	b
c	$\frac{3}{10}$	0,8

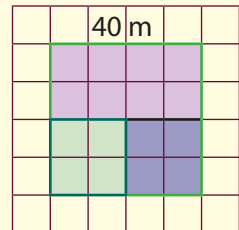
2. Pentru a participa la un proiect, elevii unei clase se împart în echipe.

Dacă se fac echipe de doi elevi, rămâne un elev fără echipă, iar dacă se fac echipe de trei elevi, rămân doi elevi fără echipă.

- (10p) **a)** Precizați dacă în clasă pot fi 21 elevi.
 (10p) **b)** Aflați numărul elevilor din clasă, știind că acesta este cuprins între 20 și 30.

3. În desenul alăturat este reprezentată schița unei grădini de legume, în formă de pătrat. Grădina se împarte în trei suprafețe, dintre care două au și ele formă de pătrat.

- (10p) **a)** Aflați perimetrul și aria grădinii.
 (10p) **b)** Calculați aria terenului rămas, dacă proprietarul vinde terenul care are suprafața colorată cu verde.



Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
 Timpul de lucru 50 de minute.
 Se acordă 10 puncte din oficiu.

TEST 1.1

I. **1.** 899, 989, 998; **2.** 1555, 5155, 5515, 5551; **3.** 2109 și 8179; **4.** 1280. II. **1.** C; **2.** B; **3.** C. III. **1. a)** o soluție: 452, 462, 804; **b)** 402 și 894. **2.** $a = 6, a = 7, a = 8, a = 9$. **3. a)** ordinea punctelor pe axă C, A, B, D; **b)** $n = 6$.

TEST 1.2

I. **1.** 1614; **2.** 3876; **3.** 2577; **4.** 674. II. **1.** C; **2.** A; **3.** B. III. **1.** $a:13 = 124 < 132 = b:12$. **2.** 28, 16, 16 și 20. **3.** 7.

TEST 1.3.1

I. **1.** 1369; **2.** 22^5 ; **3.** 7; **4.** 100. II. **1.** B; **2.** D; **3.** A. III. **1.** $n = 14, m = 6$. **2. a)** 9; **b)** 4; **c)** 2. **3. a)** $x = 2^{18}, y = 2^{21}$ și $x < y$; **b)** $x \cdot y = 2^{39} = 8^{13} < 10^{13}$.

TEST 1.3.2

I. **1.** 261; **2.** 927; **3.** 192; **4.** 2400. II. **1.** C; **2.** A; **3.** B. III. **1.** 285 pagini. **2.** $A = 81 = 9^2$. **3. a)** $x = 14, y = 63$; **b)** $u(x^2) = u(4^2) = 6, u(y) = 3 \Rightarrow u(x^2 \cdot y) = u(6 \cdot 3) = 8$. Am notat $u(a) =$ ultima cifră a numărului a.

TEST 1.4

I. **1.** 30 lei; **2.** 52. II. **1.** Adrian 293 lei, Andrei 237 lei, Alin 213 lei. **2.** 45 lădițe. **3.** 16 fete, 8 băieți.

TEST 1.5

I. **1.** 1,2,3,6; **2.** 975; **3.** 210, 215; **4.** 10. II. **1.** B; **2.** D; **3.** C. III. **1. a)** 1924, 1726, 1528; **b)** 2232, 5235, 8238. **2.** $A = 129, B = 144$ și multiplii sunt 130, 135, 140. **3. a)** $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ divizibil cu $5^2 = 25$ și $25 \div 25 \Rightarrow C \div 25$; **b)** $C = 999975$ și suma cifrelor este $48 \div 9 \Rightarrow C \div 9$.

TEST 2.1

I. **1.** F; **2.** A; **3.** F; **4.** F. II. **1.** C; **2.** A; **3.** D. III. **1. b)** Punctul B. **2.** $\frac{4)7}{3} = \frac{28}{12}, \frac{3)9}{4} = \frac{27}{12}, \frac{2)13}{6} = \frac{26}{12}$. Ordinea crescătoare este: $\frac{23}{12}, \frac{13}{6}, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}$. **3. a)** Roșu: $\frac{1}{5}$; 20%; galben: $\frac{1}{4}$; 25%; albastru: $\frac{9}{25}$; 36%; **b)** 19%.

TEST 2.2

I. **1.** $\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{57}{40}$; **3.** $\frac{7}{2}$; **4.** $\frac{8}{9}$. II. **1.** D; **2.** B; **3.** C. III. **1. a)** $x = \frac{9}{5}, y = 1, z = \frac{21}{8}$; **b)** $x = 1\frac{4}{5}, y = 1, z = 2\frac{5}{8}$; ordinea crescătoare y, x, z. **2. a)** 252 de fete; **b)** 504 elevi.

TEST 3.1

I. **1.** 0,1; **2.** 7; **3.** 1023; **4.** 51. II. **1.** B; **2.** C; **3.** D. III. **1. a)** 3,1; 3,567; 3,98; **b)** 2,98; 2,99; 2,995; **c)** 1,756; 1,76; 1,764. **2. a)** 1,357 și 0,357; **b)** 0,204 și 0. **3. a)** 0,9; 1,0; 1,1; **b)** Se poate alege unitatea de măsură 5 cm, adică lungimea a 10 laturi ale pătrățelilor paginii din caietul de matematică.

TEST 3.2

I. **1.** 11,03; **2.** 1,98; **3.** 8,4; **4.** 12,8. II. **1.** A; **2.** D; **3.** B. III. **1. a)** $x = 32,3, y = 36,36, z = 27,75$; **b)** ordinea descrescătoare este y, x, z. **2. a)** 39,6; **b)** 10,2; 20,4 și 9.

TEST 3.3

1. În prima zi 12,4 m, în a doua zi 17,2 m, în a treia zi 18,4 m. 2. 60 kg cu 4,50 lei, 90 kg cu 6,50 lei.

3. a)

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	1	2	3	5	6	5	3

b₁) 25 elevi; b₂) 19 elevi. c) nota 8; d) 24%; e) media clasei 7,60.

TEST 4.1

II. 1. B; 2. C; 3. A. III. 1. a) 7 cm; b) 7 cm sau 19 cm. 2. a) $AP = 8$ cm, $AQ = 12$ cm; c) $AB = AP = 8$ cm $\Rightarrow AB \equiv AP$; d) 12 cm.

TEST 4.2

II. 1. C; 2. B; 3. A; 4. D. III. 1. a) 56° ; b) 120° . 2. b) 45° ; c) $\sphericalangle MOQ = \sphericalangle NOP = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle NOP \equiv \sphericalangle MOQ$.

TEST 4.3

I. 1. 330 m; 2. 8,9 dam; 3. 3 m²; 4. $404,4$ cm³. II. 1. B; 2. C; 3. A. III. 1. a) $l = 12$ cm, $P = 48$ cm; b) 13 cm, 11 cm și 143 cm². 2. a) $s_1 = 3,6$ ha; $s_2 = 5,4$ ha; $\frac{30}{100} \cdot 3,6$ ha = $1,08$ ha și $\frac{20}{100} \cdot 5,4$ ha = $1,08$ ha; suprafețele arate sunt egale; b) 9 ha – $2 \cdot 1,08$ ha = $6,84$ ha.

Test final nr. 1

I. 1. a) 206; b) 1,45; c) 1,7. 2. a) 46 m; b) 7,45 ha; c) $1,728$ dm³. II. 1. a) $u(A) = 0$ sau $u(A) = 5 \Rightarrow x = 4$ sau $x = 9$. b) 243; c) Sunt 3 soluții: 0 și 59, 30 și 29, 40 și 19. 2. a) Cu autocarul 34 km, cu bicicletele 8,5 km; b) În total 51 km. 3. $P = 84$ cm, $A = 26 \cdot 10 + 6^2 = 296$ (cm²).

Test final nr. 2

I. 1. a) 310; b) 42; c) $a = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$; numărul este 1. 2. a) 127; b) 5; c) 96. II. 1. a) $\frac{3}{11}, \frac{6}{22}, \frac{9}{33}$; b) 0,(27); c) 38. 2. a) 19,50 lei respectiv 21,50 lei; b) cele 7 mingi ar fi costat 150,50 lei, deci nu erau suficienți bani pe card. 3. a) 60 m²; b) 0,15 m²; c) Da, deoarece $10 : 0,5 = 20$ și $6 : 0,3 \cdot 20$, adică se așază 20 de „rânduri” cu câte 20 de plăci fiecare, în total 400 de plăci.

Test final nr. 3

I. 1. a) 34 ani; b) 5 ore; c) 512 litri. 2. a) $\frac{6}{7}$; b) $\frac{7}{3}$; c) 274. II. 1. a) $a = 0,7$; $b = 0,1$; $c = 0,4$; b) $a^2 = 0,49$;

$b + c = 0,5$ și $0,49 < 0,5$. 2. a) $21 = 3 \cdot 7$. Formând echipe de 3 elevi nu rămân 2 elevi fără echipă; b) Numărul de elevi din clasă este impar. Numerele impare cuprinse între 20 și 30, care dau restul 2 la împărțirea prin 3 sunt 23 și 29. În clasă sunt 23 elevi sau 29 elevi. 3. a) $P = 160$ m, $A = 1600$ m²; b) 1200 m².


$$\alpha^0 = 1$$

Manualul este prezentat în variantă tipărită și în variantă digitală.

Varianta digitală are un conținut similar celei tipărite.

În plus, cuprinde o serie de activități multimedia interactive de învățare (exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme, simulări).

Nu învățăm pentru școală, ci pentru viață.

Seneca, filosof roman

Tradiție din 1989

 www.litera.ro

ISBN 978-606-33-9057-9



9 786063 390579

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației.
Acest proiect de manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară
aprobată prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 3393/28.02.2017.

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii