EXPRESII

Determinați, pentru fiecare raport, valorile lui x pentru care acesta este definit:

i) $\dfrac{x+4}{x^2-4x+4}$ j) $\dfrac{5x-7}{x^2-25}$

$\frac{0}{7} = 0:7$ $\frac{7}{0}$

Știm că $0:7=0$ $7:0 \Rightarrow$ imposibil

$D : Î = C$ $D = Î \cdot C + R$

$\vdots$

R

$Î \neq 0$ $R < Î$

Ex: $19:3=6 \Rightarrow 1<3$

$19 = 3 \cdot 6 + 1$

$7:0=0$ $7<0$ (FALS)

$7:0=9$ $\Rightarrow$ $7:0 \Rightarrow$ nu se poate efectua

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$\dfrac{x+4}{x^2-4x+4} \Rightarrow x^2-4x+4 \neq 0 \Rightarrow$ Avem nevoie de următoarele formule:

Problema 4. Dezvoltând expresia algebrică din membrul stâng, dovediți că fiecare dintre următoarele egalități este adevărată, *oricare ar fi numerele reale a și b.*

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Soluție:

a) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Ne amintim!

În mulțimea numerelor reale, înmulțirea este distributivă față de adunare.

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$

Exemple:

1. $3 \cdot (x+2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$

2. $7y \cdot (y+3) = 7y \cdot y + 7y \cdot 3 = 7y^2 + 21y$

3. $-5ab \cdot (a-2) = (-5ab) \cdot a + (-5ab) \cdot (-2) = -5a^2b + 10ab$

Ne amintim!

Am demonstrat în lecțiile anterioare că pentru orice două numere reale, *pătratul unui binom* (suma algebrică a doi termeni) *și produsul dintre suma și diferența a doi termeni* se pot dezvolta folosind una dintre formulele:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, respectiv $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$x^2-4x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\dfrac{5x-7}{x^2-25} \Rightarrow x^2-25 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-5)\cdot(x+5) \neq 0 \Rightarrow$ $x-5 \neq 0$ $x \neq 5$; $\{$și$\}$; $x \neq 5$ $x \neq -5$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{5; -5\}$

Observăm că $3 \cdot 5 \neq 0$ $3 \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 5 = 0$

$(-2)\cdot(-4) = +8 \neq 0$

Știind că expresia $\frac{5+x}{x^2+ax-16}$ este definită pentru $x \in \mathbb{R} - \{-4; 4\}$, aflați numărul real a.

$$\Rightarrow \frac{5+x}{x^2+0\cdot x-16} \overset{(*)}{=} \frac{5+x}{x^2-16} = \frac{5+x}{(x-4)(x+4)}$$

Determinăm valorile lui a și ale lui x care anulează numitorul

$x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 4^2 + a\cdot 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow \cancel{16} + a\cdot 4 - \cancel{16} = 0 \Rightarrow 4\cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$

$x = -4 \Rightarrow (-4)^2 + a\cdot(-4) - 16 = 0 \Leftrightarrow \cancel{16} - a4 + \cancel{16} = 0 \Rightarrow -a\cdot 4 = 0 \Rightarrow a = 0$

Răspuns: $a = 0 \Rightarrow (*)$

Simplificați fracțiile:

Se consideră expresiile algebrice:

1) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1}$; 2) $\frac{x^2+x-2}{x(x+2)-3}$;

3) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$; 4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.

$\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1} = F(x)$ Punem condiția: $x^2-2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x^3-2x^2+x = x\cdot(x^2-2x+1) = x\cdot(x-1)^2$

$$F(x) = \frac{x\cdot\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}} = x,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = G(x)$ P.c. $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2-1^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$x-1 \neq 0$ și $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$x \neq 1$ $x \neq -1$

$x^2-2x+1 = x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2 = (x-1)^2$

$$G(x) = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

$H(x) = \frac{x^2+x-2}{x(x+2)-3}$ P.c. $x(x+2)-3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \neq 0$

Vom utiliza raționamentele:

$x^2+(a+b)\cdot x+ab = x^2+ax+bx+ab = x(x+a)+b\cdot(x+a) = (x+a)(x+b)$

$x^2-(a+b)\cdot x+ab = x^2-ax-bx+ab = x(x-a)-b\cdot(x-a) = (x-a)\cdot(x-b)$

$x^2+2x-3 = x^2-x+3x-3 = x\cdot x-1\cdot x+3\cdot x-1\cdot 3 = x\cdot(x-1)+3\cdot(x-1) = (x-1)\cdot(x+3)$

$x^2+x-2 = x^2+2x-x-2 = x\cdot x+2\cdot x-1\cdot x+(-1)\cdot 2 = x\cdot(x+2)-1\cdot(x+2) = (x+2)(x-1)$

$H(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x-1)}$ P.c. $(x+2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 0$ și $x-1 \neq 0$; $x \neq -2$, $x \neq 1$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

$$H(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{x+3}{x+2}$$

Varianta 2: Considerăm ecuația $ax^2+bx+c=0$ $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$
$x\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$

Calculăm $\Delta=b^2-4ac$

$\Downarrow$

$\Delta>0$ sau $\Delta=0$ sau $\Delta<0$

$\Delta>0$

$\Downarrow$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Downarrow$

$S=\{x_1;x_2\}$

$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$\Delta=0$

$\Downarrow$

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

$\Downarrow$

$S=\{x_1\}$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

$\Delta<0$

$\Downarrow$

$S=\Phi$

$ax^2+bx+c=$ nu se descompune în $\mathbb{R}$

Ex: $x^2+x-2=1\cdot x^2+1\cdot x+(-2)\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$
$\quad ax^2+bx+c$

$x^2+x-2=0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow x_1=1\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2$$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\qquad 1\cdot x^2+1\cdot x-2=1\cdot(x-1)(x-(-2))=(x-1)(x+2)$

$x^2+2x-3=0\Rightarrow 1\cdot x^2+2\cdot x+(-3)=0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow\Delta=b^2-4ac$
$\quad ax^2+bx+c=0$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+4}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-4}{2\cdot1}=\frac{-6}{2}=-3$$

$x^2+2x-3=1\cdot(x-1)\cdot(x-(-3))=(x-1)(x+3)$

$$A(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x^2-x-6}$$

P.c. $x^2-x-6\neq0\Rightarrow x^2+(-1)\cdot x+(-6)\neq0\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-6\end{cases}$

Scriem ecuația $x^2-x-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases}x_1=\dfrac{-(-1)+5}{2\cdot1}=\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\[2mm] x_2=\dfrac{-(-1)-5}{2\cdot1}=\dfrac{1-5}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

$\Downarrow$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{3;-2\}$

$x^2-x-6=1(x-3)\cdot(x-(-2))=(x-3)(x+2)$

Scriem ecuația

$2x^2+3x-5=0\Rightarrow a=2, b=3, c=-5\Rightarrow\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot2\cdot(-5)=9+40=49$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+7}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-7}{2\cdot 2} = \frac{-10^{(2}}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$2x^2+3x-5 = 2\cdot(x-1)\cdot\left(x-\left(-\frac{5}{2}\right)\right) = 2\cdot(x-1)\cdot\left(\frac{^{2)}x}{1}+\frac{5}{2}\right) = 2\cdot(x-1)\cdot\left(\frac{2x}{2}+\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \cancel{2}\cdot(x-1)\cdot\frac{2x+5}{\cancel{2}} = \underline{(x-1)(2x+5)}$$

$A(x) = \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-3)(x+2)} \Rightarrow$ nu putem simplifica $\Rightarrow$ fracție <u>ireductibilă</u>

....